Документ написан внутреннего пользования.
Subject classification (PACS):

Компьютерная томография -2005 - основанная на FBP методе

В. Г. Кон

(Дата: 16 июля 2005, файл vk5716-ce.tex)

1. Точные соотношения.

В связи с возможностью получения экспериментальных данных для применения томографии как на нейтронных пучках, так и на пучке СИ стала актуальной разработка программы по реконструкции данных, полученных при вращении образца методом CT (computer tomography). При этом разумно использовать filtered back-projection (FBP) метод, как более быстрый и простой. Программу я написал на ACL, используя некоторые специально разработанные операции. В данном документе я описываю идеи метода и детали его реализации.

Сначала идеальная схема. Пусть задана некоторая функция $f(x,y)$ на плоскости (x,y) в бесконечных пределах, называемая объектом. Вращая систему координат на угол θ можно записать эту функцию в переменных (ξ,η) причем старые и новые координаты связаны соотношениями

$$\begin{aligned} x &= \xi\cos\theta - \eta\sin\theta, \quad y = \xi\sin\theta + \eta\cos\theta, \\ \xi &= x\cos\theta + y\sin\theta, \quad \eta = x\sin\theta - y\cos\theta. \end{aligned} \tag{1}$$

Проинтегрируем эту функцию по координате η при заданных угле θ и координате ξ. В результате имеем

$$I(\xi,\theta) = \int d\eta\, f(x,y) \tag{2}$$

Функция двух переменных $I(\xi,\theta)$ как раз и может быть измерена экспериментально. Она называется синограммой объекта, то есть функции $f(x,y)$. Проблема CT есть проблема вычисления функции объекта $f(x,y)$ из ее синограммы $I(\xi,\theta)$. Оказывается в идеальном случае эта задача решается однозначно и за один проход. Метод состоит в следующем. Сначала вычисляется преобразование Фурье от синограммы

$$S(u,\theta) = \int d\xi\, \exp(iu\xi)\, I(\xi,\theta) = \int d\xi d\eta\, \exp(iu\xi)\, f(x,y) \tag{3}$$

Легко видно, что эта функция представляет собой двумерное преобразование Фурье на линии $(u, v = 0)$ плоскости (u,v), которая является обратной к плоскости (ξ,η). Переходя к плоскости (p,q), которая является обратной к плоскости (x,y),

видим, что в этой плоскости линия образует угол θ с осью абсцисс точно так же, как было в прямом пространстве. Рассмотрим обратное преобразование Фурье

$$f(x,y) = (2\pi)^{-2} \int dpdq \exp(-ipx - iqy)\, F(p,q) \tag{4}$$

и перейдем в интеграле к полярным координатам (r,θ) используя следующие соотношения

$$\begin{aligned} x &= \xi\cos\theta - \eta\sin\theta, \quad y = \xi\sin\theta + \eta\cos\theta, \\ p &= r\cos\theta, \quad q = r\sin\theta. \end{aligned} \tag{5}$$

Подставляя в интеграл, получаем следующее соотношение

$$f(x,y) = (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} dr\, r\, \exp(-ir\xi)\, F(r,\theta) \tag{6}$$

Легко сообразить, что величина $F(r,\theta)$ совпадает с величиной $S(u,\theta)$ при положительных значениях $u = r$. Отрицательные значения можно получить. если одновременно с углом θ рассматривать угол $\theta + \pi$. Соответственно выражение можно переписать в виде

$$f(x,y) = (2\pi)^{-2} \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} du\, |u|\, \exp(-iu\xi)\, S(u,\theta) \tag{7}$$

Полученный нами результат обычно записывают в несколько ином тождественном виде, а именно

$$f(x,y) = (2\pi)^{-1} \int_0^{\pi} d\theta\, Q(x\cos\theta + y\sin\theta,\, \theta), \tag{8}$$

$$Q(\xi,\theta) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} du\, \exp(-iu\xi)\, |u|\, S(u,\theta) \tag{9}$$

$$S(u,\theta) = \int d\xi\, \exp(iu\xi)\, I(\xi,\theta) \tag{10}$$

Теперь преимущества данного подхода особенно наглядны. Действительно, имея исходно синограмму, мы для каждого угла θ независимо вычисляем одномерное преобразование Фурье, получая функцию $S(u,\theta)$. Затем мы умножаем эту функцию на фильтр в виде $|u|$ и делаем обратное преобразование Фурье. После этого искомый объект, то есть функция $f(x,y)$, вычисляется простым суммированием по всем проекциям с одновременным проектированием реальной точки на соотвествующую проекцию.

2. Численная реализация.

Как показано в предыдущем разделе, реконструкция синограммы в томограмму

выполняется в три этапа, причем первые два этапа можно выполнять как раздельно, так и вместе. Сначала при каждом угле синограммы надо выполнить преобразование Фурье по поперечной координате, затем умножить ее на фильтр и сделать обратное преобразование Фурье. Для выполнения этой работы удобно использовать процедуру быстрого преобразования Фурье, которая уже является операцией ACL. При этом необходимо, чтобы число точек массива по координатам ξ и u равнялось $N = 2^n$ где n - целое число. Разумные значения $N = 256$ или $N = 512$. Если экспериментальных точек больше, то лишние разумно просуммировать для уменьшения шума. Таким образом переход от $I(\xi, \theta)$ к $S(u, \theta)$ и затем к $Q(\xi, \theta)$ может быть написан на ACL непосредственно без потери скорости счета. Что же касается преобразования от $Q(\xi, \theta)$ к $f(x, y)$, то оно выполнено как специальная операция "tom"команды "math". При этом скорость счета тоже максимальная. Так как синограмма известна численно в конечных пределах, то этот интервал равен диаметру круга, вписанного в квадрат, внутри которого объект восстаналивается в полной мере. Граница этого круга обычно хорошо заметна на восстановленых томограммах, если только объект не равен нулю за пределами какой-либо малой области внутри круга. За пределами круга восстановление идет только частично и вообще говоря изображением в этой области не следует интересоваться, так как оно неправильное. Интеграл по углу вычисляется методом прямоугольников с постоянным шагом на системе M точек от 0 до $\pi(1 - 1/M)$ с шагом π/M . Число углов может быть произвольным и конечно чем больше тем лучше.

Интересно, что реальные поперечные размеры объекта в задачу не входят. Можно, например, выбрать шаг сетки точек по координате ξ равным единице. Тогда шаг сетки точек обратного пространства будет равен $\Delta u = 2\pi/N$. Кроме того шаг сетки точек в интеграле по углу равен π/M. Поэтому общий множитель равен $(2\pi/N)^2(\pi/M)(2\pi)^{-2} = \pi/(MN^2)$. Этот множитель необходимо учитвать либо при вычислении обратного преобразования Фурье (что реально и делается), либо при вычислении интеграла по углам. В процедуре вычисления функции $Q(x\cos\theta + y\sin\theta,\ \theta)$ по заданным значениям x и y на сетке, используется линейная интерполяция $Q(\xi) = Q_i(\xi_{i+1} - \xi) + Q_{i+1}(\xi - \xi_i)$. Такая простая формула получается потому, что выбран единичный шаг сетки.

Вся процедура в целом сделана в виде супер-команды ##tomo. Процедура использует синограмму, записанную в файл со стандартным именем "object.sin"и единственный параметр M - число проекций. Результат записывается в файл со стандартным именем "object.rec". Число точек сетки на квадратной области объекта вычиляется автоматически из размера файла.

3. Проверка на модельном объекте.

Модельный объект на квадратной области может быть очень просто задан средствами графики. Графический файл после построения по программе спасается в jpeg-файл, который затем операцией #f [op=tobm;] переводится в байтовую квадратную матрицу, каждый байт которой представляет одну точку объекта. Суммирование матрицы по первому и по второму индексу операцией #math [op=mss;]

сразу дает значение проекции при нулевом угле и угле $\pi/2$. Затем матрица вращается на угол π/M и процедура суммирования повторяется. Очевидно, данная операция дает правильные проекции только при четном значении M. Вращение матрицы выполняется операцией #math [op=mmr;]. Эта операция использует проектирование точек заданной сетки на исходную сетку и линейную интерполяцию на спроектированные точки из точек исходной матрицы. Если новые точки попадают за пределы исходной матрицы, то там предполагаются нулевые значения исходной матрицы. Процедура получения синограммы из квадратной матрицы объекта сделана в виде супер-команды ##sino.