

УДК 548.73

## ТЕОРИЯ РЕНТГЕНОВСКОГО ИНТЕРФЕРОМЕТРА В ФОРМЕ МАССИВА ПЛАНАРНЫХ СОСТАВНЫХ ПРЕЛОМЛЯЮЩИХ ЛИНЗ

© 2016 г. В. Г. Кош

*Национальный исследовательский центр “Курчатовский Институт”,  
123182 Москва, Россия*

*E-mail: kohnvict@yandex.ru*

Поступила в редакцию 05.10.2015 г.

Представлены результаты теоретического анализа интерференционной картины, создаваемой рентгеновским многолинзовым интерферометром в случае произвольного числа планарных составных преломляющих линз. Вычислены поперечные и продольные относительно направления распространения синхротронного излучения полуширины резонансных пиков на расстояниях, соответствующих дробному эффекту Талбота. Показано, что между ширинами существует соотношение, очень близкое к соотношению ширин при фокусировании одной линзой. Обсуждается различие между дробным и полным эффектом Талбота и анализируются необходимые условия для поперечной и продольной когерентности излучения, выполнение которых гарантирует экспериментальное наблюдение пиков интерференции в неискаженной форме.

**Ключевые слова:** рентгеновский интерферометр, преломляющая линза, эффект Талбота.

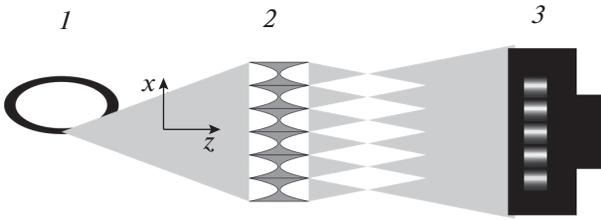
**DOI:** 10.7868/S0207352816070106

### ВВЕДЕНИЕ

Производство рентгеновских фокусирующих оптических систем, представляющих собой составные преломляющие линзы, интенсивно развивается начиная с 1996 года [1]. Они имеют преимущества для фокусировки рентгеновского излучения с высокой энергией фотонов (более 30 кэВ) по сравнению с другими системами. В настоящее время наиболее популярны две технологии изготовления таких линз. Первая использует прессование материала параболическими молоточками (пуансонами) для создания круглой (2D) апертуры [2]. Вторая создает планарные линзы для одномерной (1D) фокусировки. Современные планарные составные преломляющие линзы представляют собой поверхностный слой кристалла определенной толщины, содержащий вертикальные ступеньки, ограниченные параболическим профилем. Фактически, рентгеновское излучение фокусируется в поверхностном слое кристалла на выпуклых пустотах, в отличие от видимого света, который фокусируется на выпуклом материале. Это связано с тем, что реальная часть комплексного показателя преломления  $n$  рентгеновского излучения меньше единицы:  $n = 1 - \delta + i\beta$ . Параметр  $\beta$  связан с линейным коэффициентом поглощения  $\mu$  простым соотношением:  $\mu = 2K\beta$ , где  $K = 2\pi/\lambda$  есть волновое число,  $\lambda$  — длина волны монохроматического рентгеновского излучения.

Обычно используется кристалл кремния, так как методы микроструктурирования (литография электронным пучком и глубокое анизотропное травление) поверхности кремния очень хорошо развиты [3–5]. Такие линзы имеют рекордно малое фокусное расстояние (до 1 см) и позволяют уменьшить пучок в фокусе до размеров в десять раз меньше микрона, поэтому их называют нанофокусирующими линзами. Важным свойством таких линз является также их малая апертура (50 мкм и меньше). Хотя, вообще говоря, это недостаток, но для источников синхротронного излучения третьего поколения (например, ESRF в г. Гренобле, Франция) он компенсируется тем, что размер самих пучков также очень мал, а размер поперечной (пространственной) когерентности еще меньше и соизмерим с эффективной апертурой таких линз.

С другой стороны, малая апертура планарных составных преломляющих линз позволила сделать следующий шаг, а именно создать двухлинзовый [6] и многолинзовый [7] интерферометры, в которых несколько планарных составных преломляющих линз создаются на одном кристалле в направлении, перпендикулярном направлению распространения пучка так, что они идут параллельно друг другу, соприкасаясь краями апертур. Схема эксперимента с таким интерферометром показана на рис. 1. Хотя на рисунке условно пока-



**Рис. 1.** Условная схема эксперимента с использованием рентгеновского многолинзового интерферометра: 1 – источник синхротронного излучения; 2 – интерферометр (показана одна линза как эквивалент “паровоза” из  $N$  линз, радиус кривизны параболической поверхности которых в  $N$  раз больше); 3 – детектор (показан фрагмент интерференционной картины).

зана одна линза, на практике используется “паровоз” из линз с большим радиусом кривизны параболической поверхности. Если фокусное расстояние такой линзы меньше ее длины более чем в три раза, то составная и однократная линзы с одним и тем же эффективным радиусом кривизны работают одинаково [8]. Линзы собирают падающий пучок в два или несколько фокусов, после чего пучки расходятся так, как будто фокусы являются вторичными источниками рентгеновского излучения. На некотором расстоянии вдоль оси распространения излучения (ось  $z$  декартовой системы координат) пучки от разных вторичных источников пересекаются и интерферируют, если сумма апертур линз, их создающих, меньше размера поперечной когерентности. В этом случае все вторичные источники являются когерентными. Будем предполагать, что это условие выполняется, хотя в реальности это не всегда так.

В данной работе представлены результаты теоретического анализа интерференционной картины, создаваемой рентгеновским многолинзовым интерферометром в случае произвольного числа линз. Главное внимание уделяется резонансной структуре, которая появляется на расстояниях  $z_N = d^2/\lambda N$  от вторичных источников, где  $d$  – расстояние между вторичными источниками в направлении, перпендикулярном направлению распространения пучка, равное апертуре линз,  $N$  – целое число. Появление такой структуры принято называть дробным эффектом Талбота, хотя между ним и эффектом Талбота, который состоит в том, что вторичные источники воспроизводят себя на расстояниях  $n z_T$ , где  $z_T = 2d^2/\lambda$  и  $n$  – целое число, есть существенные различия, показать которые также является целью данной работы. Дополнительно обсуждаются условия для поперечной и продольной когерентности, которые необходимо выполнить, чтобы экспериментально увидеть интерференционную картину.

## ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ И ИХ СЛЕДСТВИЯ

Рассмотрим наиболее типичный случай, когда длина планарных составных преломляющих линз много меньше расстояния до сфокусированного изображения источника. В этом случае численный расчет оптических свойств рентгеновского многолинзового наноинтерферометра можно проводить в рамках обычной теории рентгеновского фазового контраста [9]. В этой теории интерферометр описывается трансмиссионной функцией  $T(x)$ , зависящей от координаты  $x$  в направлении, перпендикулярном направлению распространения пучка (рис. 1), а именно:

$$T(x) = \exp(-iK[\delta - i\beta]t(x)), \quad (1)$$

где  $t(x)$  – переменная толщина материала линзы вдоль луча, параллельного оптической оси и проходящего через точку  $x$ .

Пусть расстояние между источником излучения и интерферометром равно  $z_0$ , а расстояние между интерферометром и детектором равно  $z_1$ . Тогда распределение интенсивности  $I(x)$  на детекторе может быть вычислено по формулам:

$$I(x) = |a(x_0)|^2, \quad (2)$$

$$a(x_0) = \int dx_1 P(x_0 - x_1, Z) T(x_1),$$

где  $x_0 = x(z_0/z_1)$ ,  $Z = z_0 z_1 / z_1$ ,  $z_1 = z_0 + z_1$ , а функция  $P(x, z)$  есть пропагатор Френеля

$$P(x, z) = (i\lambda z)^{-1/2} \exp\left(i\pi \frac{x^2}{\lambda z}\right). \quad (3)$$

Как следует из (2), интерференционная картина одинакова как для параллельного, так и для расходящегося пучка.

Однако положение картины в пространстве ( $z_1$ ) и ее поперечные размеры ( $x$ ) зависят от расстояния  $z_0$ . Для параллельного пучка ( $z_0 = \infty$ ) имеем  $x = x_0$ ,  $z_1 = Z$ . Для расходящегося пучка:

$$x = x_0 \left(1 + \frac{z_1}{z_0}\right), \quad z_1 = \frac{Z}{1 - Z/z_0}. \quad (4)$$

Таким образом, в расходящемся пучке получаем такую же картину, но с увеличенным поперечным размером и на более далеком расстоянии от интерферометра. Формулы (4) следует учитывать при экспериментальном исследовании оптических свойств многолинзового интерферометра. Но для теоретического анализа достаточно ограничиться случаем параллельного пучка, когда  $z_0 = \infty$ .

Пусть интерферометр представляет собой массив из  $M$  линз, и его апертура ограничена щелью. Тогда функцию  $t(x)$  в (1) можно записать в виде:

$$t(x) = \sum_{k=1}^M t_k(x), \quad (5)$$

$$t_k(x) = \frac{(x - x_k)^2}{R} \theta(d - 2|x - x_k|).$$

Здесь  $d$  – расстояние между центрами линз, равное их физической апертуре,  $R = R_0/N$  – эффективный радиус кривизны параболического профиля линзы при условии, что  $R_0$  – физический радиус кривизны для одного элемента,  $N$  – число элементов,  $\theta(x)$  – функция Хевисайда, равная единице для положительного аргумента и нулю для отрицательного. Координаты центров линз равны  $x_k = d(k - [M + 1]/2)$ . Будем рассматривать симметричный случай, когда  $M$  – четное число.

Формулы (1)–(5) были использованы для разработки компьютерной программы, которая позволяет учесть тонкие эффекты, связанные с ограничением апертуры линз из-за поглощения в неоднородном материале. Однако общие свойства могут быть получены без численных расчетов. Система линз интерферометра фокусирует параллельный пучок в точках с поперечными координатами  $x_k$ . Эти фокусы можно рассматривать как вторичные источники, расположенные на расстоянии  $f$  от интерферометра. Рассмотрим такие расстояния  $z_{1N} = f + z_N$  от интерферометра до детектора, пройдя которые волны будут иметь одну и ту же фазу на оптической оси ( $x = 0$ ), если пренебречь разницей фаз в целое число  $2\pi$ . Очевидно, что на таких расстояниях относительная интенсивность излучения будет в  $M^2$  раз выше, чем от одной линзы.

Длина пути от вторичного источника с номером  $k$  до оптической оси на расстоянии  $z$  равна:

$$r_k = (z^2 + x_k^2)^{1/2} \approx z + \frac{x_k^2}{2z} = z + \frac{d^2(k - (M + 1)/2)^2}{2z}. \quad (6)$$

На указанных расстояниях  $z$  разность путей для разных источников равна целому числу длин волн. Эта разность для источников с произвольными номерами  $k$  и  $i$  равна:

$$r_k - r_i = r_{ki}^{(0)} = \frac{d^2}{z} \left[ (k - i) \left( \frac{k + i}{2} - \frac{M + 1}{2} \right) \right]. \quad (7)$$

Легко убедиться, что выражение в квадратных скобках есть целое число. Действительно,  $k$ ,  $i$  и  $M$  – целые числа, и  $M$  – четное число. Если  $k - i$  нечетное число, то  $k + i$  тоже нечетное число. Следовательно, выражение в круглых скобках

равно целому числу. Если  $k - i$  четное число, то тогда выражение в круглых скобках является полуполным числом, и при умножении на четное число снова получаем целое число.

Следовательно, условие резонанса можно записать в виде:  $d^2/z_N = \lambda N$ , где  $N$  – произвольное целое число, которое будем называть порядком резонанса. Из этого условия получаем формулу для расстояний  $z_N = d^2/\lambda N$ , на которых возникает резонанс, т.е. все вторичные источники интерферируют конструктивно.

Так же просто можно вычислить период интерференционной структуры. Для этого надо повторить все вычисления для точки с координатой  $x$  на детекторе, предполагая, что  $z = z_N$ . Приведем сразу результат расчета:

$$r_k - r_i = r_{ki}^{(0)} - \lambda \frac{xN}{d} (k - i). \quad (8)$$

Из этой формулы следует, что период интерференционной структуры равен  $p = d/N$ . То есть картина на расстоянии в  $N$  раз меньше главного резонанса, имеет в  $N$  раз меньший период, а период главного резонанса равен периоду расположения источников.

Случай двухлинзового интерферометра является особым. Если  $M = 2$ , то выражение в квадратных скобках формулы (7) равно нулю. Следовательно, условие резонанса выполняется на любом расстоянии  $z$ . Соответственно, период зависит от расстояния и равен  $p = \lambda z/d$ .

### АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИДЕАЛЬНОГО ИНТЕРФЕРОМЕТРА

Рассмотрим структуру интерференционных полос на резонансных расстояниях  $z_N$ . Формально это могут быть очень короткие расстояния для больших значений  $N$ . Однако для многолинзового интерферометра с большим числом линз  $M$  и относительно малой апертурой каждой линзы пучки от всех линз не смогут интерферировать на малых расстояниях, поскольку они будут разделены в пространстве. Будем предполагать, что расстояния  $z_N$  все же достаточно большие, чтобы все пучки могли пересекаться хотя бы в малой области вблизи оптической оси.

Рассмотрим идеальный интерферометр, который фокусирует падающую плоскую волну в точечные вторичные источники, и будем отсчитывать расстояние  $z$  от таких источников. Волновая

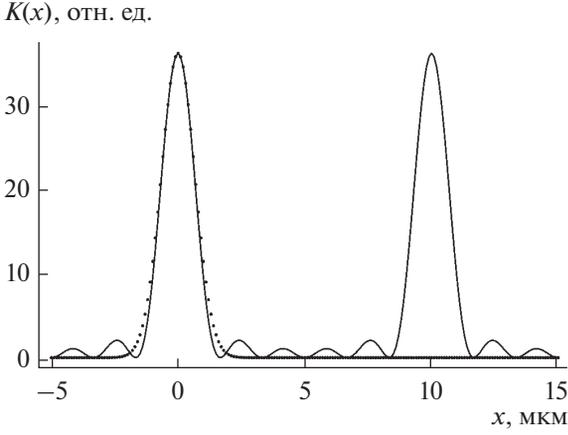


Рис. 2. Функция  $K(x)$  для  $M = 6$ ,  $p = 10$  мкм (сплошная кривая), и ее аппроксимация функцией Гаусса (точки).

функция излучения в описанных выше условиях равна сумме пропагаторов Френеля:

$$E(x, z) = (i\lambda z)^{-1/2} \sum_{k=1}^M \exp\left(i\pi \frac{(x - x_k)^2}{\lambda z}\right), \quad (9)$$

$$x_k = d \left(k - \frac{M+1}{2}\right).$$

Детектор измеряет интенсивность излучения  $I(x, z)$  как квадрат модуля этой функции. Соответственно, получаем:

$$I(x, z) = \frac{1}{\lambda z} \left( M + 2 \sum_{k=2}^M \sum_{j=1}^{k-1} \cos(\varphi_{kj}(x, z)) \right), \quad (10)$$

$$\varphi_{kj} = \pi \frac{2x(x_j - x_k) + x_k^2 - x_j^2}{\lambda z}.$$

Подставим значения координат из (9) и для вычисления двойной суммы перегруппируем члены, выделяя пары членов с одинаковым расстоянием между источниками. А именно, для каждого значения индекса  $k$  просуммируем все индексы  $j = k - m$ , где  $m = 1, 2, \dots, k - 1$ . В результате для функции  $K(x, z) = \lambda z I(x, z)$  получаем:

$$K(x, z) = M + 2 \sum_{k=2}^M \sum_{m=1}^{k-1} \cos(\psi_{km}(x, z)), \quad (11)$$

$$\psi_{km} = \frac{\pi m}{\lambda z} \left( 2xd + [M + m + 1 - 2k]d^2 \right).$$

Заметим, что член в аргументе косинуса  $\psi_{km}$ , зависящий от  $x$ , не зависит от индекса  $k$ . Снова перегруппируем члены с использованием подста-

новки  $k = (M + m + 1)/2 + l$  так, чтобы сумма по  $m$  была первой, и окончательно получаем выражение:

$$K(x, z) = M + 2 \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{l=-(M-m-1)/2}^{(M-m-1)/2} \cos\left(\frac{2\pi m}{\lambda z} (xd - ld^2)\right). \quad (12)$$

В данном случае  $M$  есть четное число, а  $m$  — целое число, следовательно, индекс  $l$  может быть как целым, так и полуцелым числом.

Если  $M = 2$ , то получаем только один член с  $m = 1$ ,  $l = 0$ . При увеличении числа линз  $M$  число членов в формуле (12) быстро растет. Так, для  $M = 6$  имеем 15 членов, разделенных на пять групп с разными периодами. Важно отметить, что произведение  $ml$  всегда целое, даже для полуцелых значений  $l$ . Легко понять, что период функции  $K(x)$ , а, следовательно, и период интерференционной структуры равен  $p = \lambda z/d$ , но существуют более высокие гармоники с меньшим периодом. Однако на резонансных расстояниях  $z = z_N = d^2/\lambda N$  аргумент  $ld^2$  не влияет на результат, поскольку он равен целому числу  $2\pi$ . На таких расстояниях получаем более простое выражение:

$$K(x, z_N) = M + 2 \sum_{m=1}^{M-1} (M - m) \cos\left(2\pi \frac{m}{p} x\right), \quad (13)$$

$$p = \frac{\lambda z_N}{d} = \frac{d}{N}.$$

Интересно, что период интерференционной структуры не зависит от числа линз  $M$ , но высота максимумов зависит. При  $x = 0$  имеем  $K(0) = M^2$ . С другой стороны,

$$\langle K \rangle = \int_0^p dx K(x, z_N) = M. \quad (14)$$

Следовательно, пиковое значение в  $M$  раз выше среднего значения, которое в  $M$  раз выше значения для одной линзы. Очевидно, что среднее значение равно интенсивности для некогерентного источника.

Более сложным вопросом является определение ширины пика в направлениях как перпендикулярном, так и параллельном направлению распространения пучка. Численные расчеты показывают, что ширина пика в перпендикулярном направлении примерно в  $M$  раз меньше периода, и пик примерно описывается функцией Гаусса. Предположим, что для больших значений  $M$  и вблизи точки  $x = 0$  функция  $K(x) \approx M^2 \exp(-\alpha x^2)$ . Коэффициент  $\alpha$  можно определить, сравнивая второй член разложения экспоненты в степенной ряд по  $x^2$  с разложением точного выражения (13). Затем полуширина пика (ширина на половине вы-

соты)  $w_i = 1.665\alpha^{-1/2}$  может быть получена из функции Гаусса. Первые члены разложения равны:

$$K(x, z_N) = M + 2 \sum_{m=1}^{M-1} (M-m) \left(1 - \frac{b^2 m^2}{2}\right) = M^2 - M^2 \frac{M^2 - 1}{12} b^2. \quad (15)$$

Здесь  $b = 2\pi x/p$ , а точные значения сумм могут быть взяты из таблиц или из интернета [10]. Таким образом, получаем:

$$\alpha = \left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 \frac{M^2 - 1}{12}, \quad w_i = \frac{1.665}{\alpha^{1/2}} = p \frac{0.9180}{(M^2 - 1)^{1/2}}. \quad (16)$$

Интересно, что для  $M = 2$  формула (16) дает  $w_i = 0.52p$ , в то время как для больших значений  $M$  получаем  $w_i = 0.92p/M$ . На рис. 2 точная функция  $K(x)$  для  $M = 6$  и  $p = 10$  мкм показана сплошной линией, а ее аппроксимация функцией Гаусса показана точками. Видно, что аппроксимация функцией Гаусса хорошо работает.

Рассмотрим продольную форму резонансного пика. Положим в формуле (12)  $x = 0$  и сделаем замену  $z = (d^2/\lambda N)(1 + s/N)$ . Рассмотрим лишь малые значения  $s$ , для которых можно использовать приближение  $1/z = (\lambda N/d^2)(1 - s/N)$ . В результате получаем функцию:

$$K_1(s) = M + 2 \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{l=-(M-m-1)/2}^{(M-m-1)/2} \cos(2\pi m l s). \quad (17)$$

Теперь можно применить к этой функции тот же самый метод, что и ранее. Так, первые два члена разложения в степенной ряд по  $s^2$  равны:

$$K_1(0, s) \approx M^2 - (2\pi s)^2 C, \quad (18)$$

где

$$C = \sum_{m=1}^{M-1} m^2 \sum_{l=-(M-m-1)/2}^{(M-m-1)/2} l^2 = \frac{M^2(M^2 - 1)(M^2 - 4)}{720}. \quad (19)$$

Коэффициент  $C$  имеет простой физический смысл, хотя прямой расчет суммы достаточно сложный. В самом деле, коэффициент должен быть равен нулю для  $M = 0, 1$  и  $2$ , потому что для этих значений  $M$  резонансная структура отсутствует. Точный расчет дает правильное значение знаменателя.

Снова аппроксимируем точную функцию (17) функцией Гаусса  $M^2 \exp(-\alpha s^2)$  вблизи резонанс-

$K(0, z)$ , отн. ед.

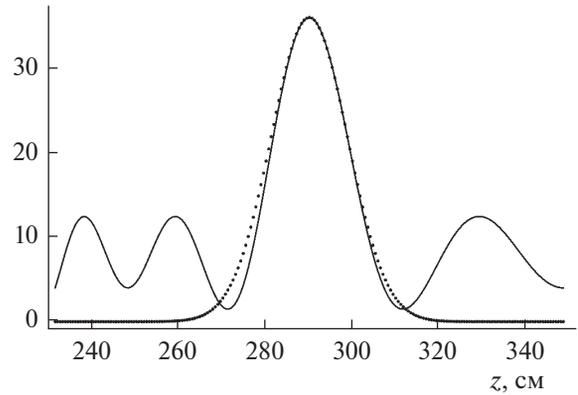


Рис. 3. Функция  $K(0, z)$  для  $M = 6, E = 12$  кэВ,  $d = 30$  мкм,  $N = 3$  (сплошная кривая), и ее аппроксимация функцией Гаусса (точки).

ного пика и получим полуширину пика функции (17) в виде:

$$w_s = \frac{1.665}{\alpha^{1/2}} = \frac{7.111}{[(M^2 - 1)(M^2 - 4)]^{1/2}}, \quad (20)$$

$$\alpha = (2\pi)^2 \frac{(M^2 - 1)(M^2 - 4)}{720}.$$

Параметр  $w_s$  универсальный, но реальная полуширина пика интенсивности вдоль оптической оси при больших значениях  $M$  примерно равна:

$$w_i = \frac{d^2 w_s}{\lambda N^2} \approx \frac{7.111 p^2}{\lambda M^2} \approx 8.438 \frac{w_i^2}{\lambda}. \quad (21)$$

Эта формула менее универсальна, потому что она зависит от  $\lambda$ . На рис. 3 показаны точная расчетная кривая функции  $K(0, z)$  вблизи резонансного пика для  $M = 6, E = 12$  кэВ,  $d = 30$  мкм и  $N = 3$ . Видно, что резонансный пик всего в три раза больше по сравнению с другими максимумами и что его полуширина весьма близка к полуширине кривой Гаусса.

Следует отметить, что в этих расчетах реальная апертура линз никак не учитывалась. Тем не менее, полученное соотношение между поперечной и продольной полуширинами резонансного пика очень похоже на аналогичное соотношение для фокусировки одной составной преломляющей линзой. Например, если апертура линзы определяется поглощением, то из теории фокусировки одной линзой [11] для поперечной полуширины пика интенсивности в фокусе имеем  $w_i = 0.6643(\lambda f \gamma)^{1/2}$ , где  $f = R/2\delta$  есть фокусное расстояние,  $\gamma = \beta/\delta$ . С другой стороны, для продольной полуширины можно получить оценку  $w_l = (12)^{1/2} f \gamma = 7.850 w_i^2 / \lambda$ . Эта формула отличается от (21) лишь тем, что численный коэффициент меньше на 7%.

## ЭФФЕКТ ТАЛБОТА ДЛЯ КОНЕЧНОГО ЧИСЛА ИСТОЧНИКОВ

Эффект Талбота [12] можно сформулировать как полное воспроизведение поперечной периодической волновой функции с периодом  $d$  при распространении излучения вдоль оптической оси (ось  $z$ ) на расстояние  $z_T = 2d^2/\lambda$ . Он легко доказывается с помощью преобразования Фурье. Периодическую волновую функцию можно представить в виде ряда Фурье:

$$E(x, 0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F(h_m) \exp(ih_m x), \quad (22)$$

$$h_m = \frac{2\pi}{d} m,$$

где

$$F(h_m) = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} dx E(x, 0) \exp(-ih_m x). \quad (23)$$

Распространение излучения на расстояние  $z$  описывается с помощью свертки волновой функции с пропагатором Френеля:

$$E(x, z) = \int dx_1 P(x - x_1, z) E(x_1, 0). \quad (24)$$

Подставляя (22) в (24) и вычисляя интеграл, получаем:

$$E(x, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F(h_m) \exp\left(ih_m x - i\pi m^2 \frac{\lambda z}{d^2}\right). \quad (25)$$

Из этой формулы сразу следует, что  $E(x, z_T) = E(x, 0)$ . То есть не только интенсивность излучения, но и комплексная волновая функция полностью повторяется при распространении на расстояние Талбота  $z_T$ .

Этот вывод весьма прост для полностью периодического волнового поля. Однако из него нельзя сделать никаких заключений относительно конечной периодической системы точечных источников. Распределение интенсивности для конечного числа источников описывается формулой (12), но на расстояниях Талбота пики возникают в точках  $x_k = d[k - (M-1)/2] = \pm d/2, \pm 3d/2, \dots$  вместо точек  $0, \pm d, \pm 2d, \dots$ , как в случае резонанса первого порядка. Это первое отличие эффекта Талбота от резонансов (дробного эффекта Талбота).

Подставим в формулу (12) координаты  $x_T = \pm d/2$  и  $z_T = 2d^2/\lambda$  и вычислим суммы:

$$K(x_T, z_T) =$$

$$= M + 2 \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{l=-(M-m)/2}^{(M-m-1)/2} \cos\left(\pi \left[\pm \frac{m}{2} + ml\right]\right) = \frac{M^2}{2}. \quad (26)$$

Из этой формулы следует, что максимум интенсивности для пиков Талбота в случае конечного числа  $M$  источников в два раза меньше, чем в случае резонансов. Это второе отличие пиков Талбота от резонансов. Так как средняя интенсивность сохраняется, то очевидно, что поперечная полуширина пиков Талбота примерно в два раза больше, чем резонансных пиков. Более подробный анализ эффекта Талбота не входит в цели данной работы, так как пики Талбота находятся на относительно большом расстоянии и их трудно наблюдать экспериментально.

## НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ПОПЕРЕЧНОЙ КОГЕРЕНТНОСТИ

Поперечная когерентность излучения, падающего на объект, прямо относится к угловому размеру источника, определяемому на расстоянии от источника до объекта. Если координата точечного источника  $x_s$  описывает его отклонение от главной оптической оси, то можно рассмотреть временную оптическую ось, на которой находятся и источник, и объект. Очевидно, что эта ось будет повернута на угол  $\alpha = x_s/z_0$  вокруг центральной точки объекта. Интерференционная картина для такого источника будет примерно той же самой, только на детекторе она будет сдвинута от главной оптической оси на расстояние  $x'_s = \alpha z_1 = x_s z_1/z_0$ . В результате полная картина для всего источника будет соответствовать усредненной картине для точечного источника с интервалом усреднения, равным размеру проекции источника  $s = Sz_1/z_0$ , где  $S$  – реальный размер источника.

Для того чтобы увидеть пики  $N$ -го резонанса без искажений, проекция источника должна быть в два раза меньше поперечной ширины резонанса. С учетом формул (4) и (16) имеем:

$$2S \frac{z_1}{z_0} < 0.9 \frac{d}{MN} \left(1 + \frac{z_1}{z_0}\right), \quad z_1 = \frac{Z}{1 - Z/z_0}, \quad (27)$$

$$Z = f + \frac{d^2}{\lambda N}.$$

Обычно фокусное расстояние составной преломляющей линзы много меньше, чем расстояния до резонансов, которые формируются всеми линзами, и им можно пренебречь. Комбинируя выписанные формулы, условие можно переписать в виде:

$$dM < L_{tc}, \quad L_{tc} = 0.45 \frac{\lambda z_0}{S}. \quad (28)$$

Это условие имеет очень простой физический смысл. Для того чтобы экспериментально наблюдать расчетную полуширину интерференционных пиков, соответствующую интерференции всех вторичных источников, полная апертура интер-

ферометра  $dM$  должна быть меньше длины поперечной когерентности  $L_{lc}$ , как она была определена в [13, 14]. Если условие (28) не выполняется для всех линз интерферометра, то интерференционная картина будет соответствовать интерферометру с меньшим числом линз, причем число линз определяется как раз из условия (28).

Однако условие (28) не имеет практической пользы, так как не позволяет смоделировать экспериментальные кривые интерференции. Для этой цели более полезным является расчет интерференционной картины для точечного источника в виде функции распределения интенсивности и последующий расчет свертки этой функции с функцией яркости проекции источника, для которой полуширина равна  $s = Sz_1/z_0$ , где  $S$  – полуширина распределения яркости источника. Обычно принято функцию яркости источника аппроксимировать функцией Гаусса. Если же в эксперименте реальный размер источника неизвестен, то такая процедура позволяет определить его из сравнения расчетных кривых с экспериментальными.

### НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ПРОДОЛЬНОЙ КОГЕРЕНТНОСТИ

Понятие продольной когерентности вводится для некогерентного излучения, у которого энергия фотонов распределена в определенном интервале  $\Delta E$ . В соответствии с принципом неопределенности импульсы такого излучения имеют конечное время жизни  $\tau = \hbar/(2\Delta E)$ , где  $\hbar$  – постоянная Планка, деленная на  $2\pi$ . Если время измерения значительно превосходит длительность импульсов излучения, то фазовые соотношения для волн разных частот, т.е. разной энергии, теряются, и необходимо вычислять свертку функции интенсивности излучения для различных монохроматических гармоник с функцией, описывающей спектр излучения. То есть необходимо усреднить функцию (12) по длине волны излучения  $\lambda = hc/E$ , где  $h$  – постоянная Планка,  $c$  – скорость света, константа  $hc = 1.24 \text{ нм} \cdot \text{кэВ}$ . Так как функция (12) представляет собой двойную сумму косинусов, то необходимо усреднить каждый косинус независимо.

В случае источника синхротронного излучения реальный спектр определяется монохроматором. Рассмотрим простую ситуацию, когда спектр приближенно описывается функцией Гаусса:

$$W(E, \Delta E) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \sigma} \exp\left(-\frac{E^2}{2\sigma^2}\right), \quad \sigma = \frac{\Delta E}{2.355}. \quad (29)$$

$K(x)$ , отн. ед.

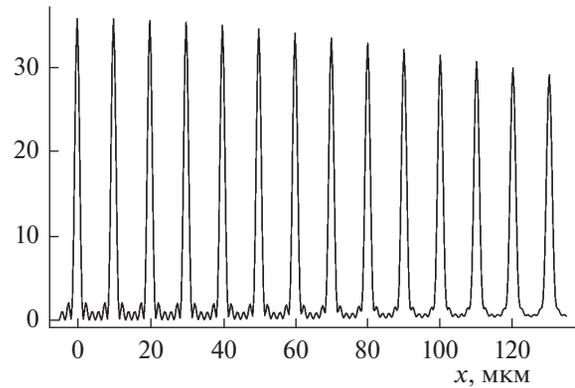


Рис. 4. Функция  $K(x)$  для  $M = 6$ ,  $E = 12 \text{ кэВ}$ ,  $p = 10 \text{ мкм}$  и  $\Delta E = 0.1 \text{ кэВ}$ .

Тогда для среднего значения косинуса получаем формулу:

$$\langle \cos(aE) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \sigma} \int dE_1 \cos(a[E + E_1]) \exp\left(-\frac{E_1^2}{2\sigma^2}\right), \quad (30)$$

где  $a = 2\pi md(x - ld)/(hc z)$ . Интеграл вычисляется аналитически, и в результате расчета получаем, что каждый косинус в сумме по  $m$  и  $l$  формулы (12) дополнительно умножается на множитель

$$C_{ml} = \exp\left(-3.56 \frac{L_{ml}^2}{L_{lc}^2}\right), \quad L_{ml} = \frac{md(x - ld)}{z}, \quad (31)$$

$$L_{lc} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = \frac{hc}{\Delta E}.$$

Параметр  $L_{lc}$  известен как длина продольной когерентности. Заметим, что величина  $L_{ml}$  определяет разность хода лучей для пары источников с центром в точке  $ld$ . Когда координата  $x$  соответствует центру пары, то для нее разность хода равна нулю.

Отсюда следует, что для конкретной точки детектора с координатой  $x$  максимальный вклад в интенсивность будут давать те источники, для которых разность хода лучей минимальна. Очевидно, что число таких пар максимально при  $x = 0$  и уменьшается с ростом  $|x|$ . На рис. 4 показан результат численного расчета интерференционной картины при следующих параметрах:  $E = 12 \text{ кэВ}$ ,  $M = 6$ ,  $N = 3$ ,  $d = 30 \text{ мкм}$ ,  $\Delta E = 0.1 \text{ кэВ}$ . Видно, что центральные пики не изменились даже при относительно большой степени некогерентности. Для резонансных расстояний  $z_N = d^2/\lambda N$  от-

ношение  $L_{mi}/L_{lc}$  можно записать в другой форме, а именно:

$$\frac{L_{mi}}{L_{lc}} = Nm \left( \frac{x}{d} - l \right) \frac{\Delta E}{E}. \quad (32)$$

Из этой формулы видно, что отношение  $E/\Delta E$  прямо пропорционально числу пиков в центральной части интерференционной картины, которое можно будет увидеть экспериментально.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Snigirev A., Kohn V., Snigireva I., Lengeler B.* // Nature. 1996. V. 384. P. 49.
2. *Lengeler B., Schroer C.G., Richwin M. et al.* // Appl. Phys. Lett. 1999. V. 74. P. 3924.
3. *Aristov V.V., Starkov V.V., Shabelnikov L.G. et al.* // Opt. Commun. 1999. V. 161. P. 203.
4. *Snigirev A., Snigireva I., Grigoriev M. et al.* // J. Phys.: Conf. Ser. 2009. V. 186. P. 012072.
5. *Schroer C.G., Kuhlmann M., Hunger U.T. et al.* // Appl. Phys. Lett. 2003. V. 82. P. 1485.
6. *Snigirev A., Snigireva I., Kohn V. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 103. P. 064801.
7. *Snigirev A., Snigireva I., Lyubomirskiy M. et al.* // Opt. Express. 2014. V. 22. P. 25842.
8. *Кон В.Г.* // ЖЭТФ. 2003. Т. 124. С. 224.
9. *Snigirev A., Snigireva I., Kohn V. et al.* // Rev. Sci. Instrum. 1995. V. 66. P. 5486.
10. <http://www.wolframalpha.com/input/?i=sum+of+m^2+over+m+++++from+1+to+n&dataset=>
11. *Кон В.Г.* // Поверхность. Рентген., синхротр. и нейтрон. исслед. 2009. № 5. С. 32.
12. *Talbot H.F.* // Philos. Mag. 1836. V. 9. № 56. P. 401.
13. *Kohn V., Snigireva I., Snigirev A.* // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 85. P. 2745.
14. *Kohn V., Snigireva I., Snigirev A.* // Opt. Commun. 2001. V. 198. P. 293.

## Theory of X-Ray Interferometer in the Form of Array of Planar Compound Refractive Lenses

V. G. Kohn

The results of theoretical analysis of interference fringes created by an X-ray multilens interferometer in the case of arbitrary number of planar compound refractive lenses are presented. Full widths at a half maximum of resonance peaks are calculated in the directions perpendicular and parallel to the synchrotron radiation beam at distances corresponding to the fractional Talbot effect. The relation between widths is shown to exist and to be close to the same relation in the case of the focusing by one lens. A difference between the fractional and full Talbot effects is discussed. Conditions necessary for the lateral and longitudinal coherence of radiation which guarantee the experimental observation of undistorted interference fringes are analyzed.