

# НОВЫЙ ВАРИАНТ ТЕОРИИ НАНОФОКУСИРОВКИ ПУЧКОВ ЖЕСТКОГО СИНХРОТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛИННОЙ СОСТАВНОЙ ПРЕЛОМЛЯЮЩЕЙ ЛИНЗОЙ

© 2025 г. В. Г. Кон<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, Москва, Россия

\*E-mail: kohnvict@yandex.ru

Поступила в редакцию 11.12.2024 г.

После доработки 11.12.2024 г.

Принята к публикации 05.03.2025 г.

Разработан новый вариант теории нанофокусировки синхротронного излучения (СИ) в нанометровый поперечный размер с использованием длинной составной преломляющей линзы (СПЛ), в котором адекватно учитывается апертура на всей длине СПЛ в рамках геометрической оптики, полностью совместимой с теорией на основе пропагатора СПЛ. Для жесткого СИ поглощение уже не полностью ограничивает апертуру СПЛ, и учет реальной апертуры имеет важное значение для получения достоверной информации о размере пучка СИ в фокусе. Новая теория почти аналитическая и позволяет с хорошей точностью определить кривую качания длинной СПЛ, а также дает ответ в тех экзотических случаях, когда стандартные численные методы не применимы.

DOI: 10.56304/S1992722324602921

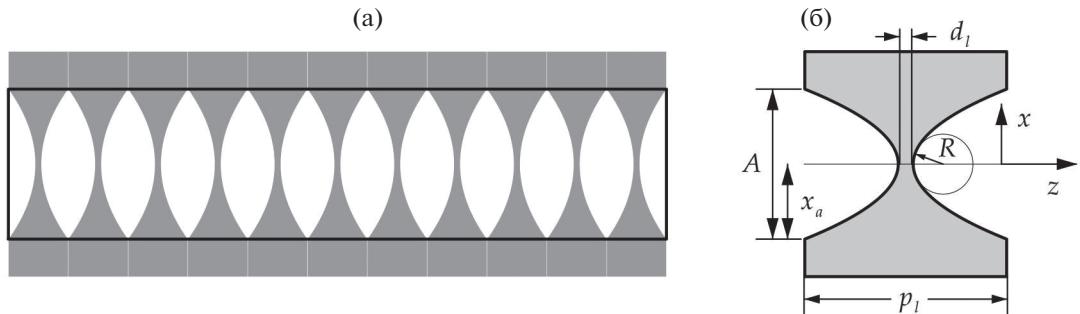
## ВВЕДЕНИЕ

Источники жесткого синхротронного излучения (СИ) третьего и четвертого поколений являются перспективными инструментами нанотехнологий, в частности нанофотоники. Развитие теории фокусировки пучков жесткого СИ имеет принципиальное значение для правильного понимания возможностей создания пучков с поперечным размером порядка нескольких нанометров. В настоящее время существуют принципиально разные способы фокусировки пучков СИ. Наиболее привлекательным является способ фокусировки, основанный на преломлении лучей на границе двух сред. Однако такой способ не мог быть реализован в течение ста лет после открытия рентгеновского излучения, поскольку это излучение, в том числе СИ, очень слабо взаимодействует с веществом и поэтому слабо преломляется.

Впервые сфокусировать пучок СИ таким способом удалось в 1996 г. [1] с помощью составной преломляющей линзы (СПЛ). Идея состояла в том, чтобы использовать периодическую структуру, где на одном периоде сформирован преломляющий элемент (рис. 1) с относительно большим радиусом кривизны вогнутых параболических поверхностей, который может быть изготовлен современными технологиями. Эффект преломления усиливается за счет многократного повторения таких элементов. В результате появился новый фокусирующий прибор, имеющий собствен-

ную периодическую структуру, и возникла необходимость развить теорию прохождения СИ через такую структуру.

Наиболее универсальный способ расчета такой структуры заключается в последовательном расчете прохождения волновой функции излучения (ВФИ) через каждый элемент с помощью рассмотрения его в приближении тонкой линзы. В этом приближении длина линзы учитывается только в фазе трансмиссионной функции, а расстояние до следующей линзы считается пустым пространством. Такой способ расчета является очень затратным, если СПЛ имеет несколько сотен периодов. Кроме неудобства, связанного с большим временем расчета, могут накапливаться ошибки округления чисел. Необходима более простая аналитическая теория, позволяющая получать информацию о свойствах СПЛ на физически понятном языке. Она была предложена в 2002 г. [2, 3]. В частности, был аналитически вычислен пропагатор длинной СПЛ, т.е. волновая функция излучения на выходе из СПЛ для точечного источника на ее входе. Аналитическая формула для пропагатора позволяет решить задачу в общем случае, т.е. для произвольной ВФИ на входе в СПЛ, в виде интеграла свертки ВФИ на входе с пропагатором. В результате получаем ВФИ на выходе из СПЛ, и ее дальнейшее распространение вычисляется стандартными методами.



**Рис. 1.** Общий вид составной преломляющей линзы как периодической структуры (а). Параметры одного периода, где  $A$  – апертура,  $x_a = A/2$ ,  $R$  – радиус кривизны параболической поверхности,  $d_l$  – толщина тонкой части,  $p_l$  – длина периода, и оси координат (б).

Однако у вычисленного пропагатора есть один недостаток: он не учитывает реальную апертуру СПЛ. Первоначально это не создавало проблем. Дело в том, что первые СПЛ имели очень большую апертуру и пучок внутри СПЛ ограничивался за счет поглощения. Поэтому реальная апертура не влияла на результат, а все определялось эффективной апертурой, т.е. той частью реальной апертуры, внутри которой ВФИ оставалась отличной от нуля на выходе из СПЛ. Все остальное излучение поглощалось внутри СПЛ. В тех случаях, когда эффективная апертура меньше реальной апертуры, расчеты с использованием пропагатора дают правильный ответ, причем в большом числе случаев этот ответ можно получить в аналитическом виде. Было опубликовано много статей [4, 5], в которых рассмотрены некоторые особенности фокусировки пучков СИ длинной СПЛ, в частности длина когерентности, кривая качания, изображение объектов и т.д.

Одним из наиболее интересных является вопрос о том, до какого размера можно сфокусировать пучок с помощью длинной СПЛ. В [6] было сделано общее утверждение, что никаким способом нельзя сделать размер сфокусированного пучка меньше величины  $w_c$ , которая определяется формулой  $w_c = \lambda(8\delta)^{-1/2}$ , где  $\lambda$  есть длина волны монохроматического излучения,  $\delta = 1 - n$  – индекс преломления,  $n$  – показатель преломления. Однако, согласно развитой теории, если у СПЛ эффективная апертура определяется поглощением, то она дает более высокий поперечный размер сфокусированного пучка. Чтобы получить меньший размер, надо уменьшать апертуру и повышать энергию фотонов, что позволит понизить влияние поглощения. В настоящее время это можно сделать только с планарными (нанофокусирующими) СПЛ, которые фокусировку делают одномерной, т.е. только по оси  $x$ . В этом случае теория, не учитывающая реальную апертуру, становится неприменимой.

Нужна более продвинутая теория, которая эту апертуру учитывает. Попытки частично учесть реальную апертуру были предприняты в [4, 5], однако не совсем корректно и только в случае падающей плоской волны, точнее при большом расстоянии от источника до СПЛ и при оптимальной ориентации оси СПЛ, когда точечный источник находится на этой оси. В настоящей работе эта проблема впервые решена в общем случае точечного источника, расположенного на любом расстоянии и при любом его сдвиге от оси СПЛ. Такой расчет можно выполнить в рамках новой геометрической оптики, согласованной с пропагатором, и при правильном учете частичного поглощения, которое также следует из пропагатора.

### УЧЕТ АПЕРТУРЫ ДЛИННОЙ СПЛ

На рис. 1а представлен общий вид длинной СПЛ и выделена фокусирующая область, имеющая высоту, равную апертуре  $A$ , и длину  $L = p_l n_l$ , где  $p_l$  – длина одного периода,  $n_l$  – число периодов. На рис. 1б показаны основные параметры одного периода, в том числе радиус кривизны вогнутых параболических поверхностей  $R$  и толщина самой тонкой части  $d_l$  в середине периода. При этом  $p_l = x_a^2/R + d_l$ , где  $x_a = A/2$ . Также показаны оси координат, используемые в расчетах. В аналитической теории [2, 3] переменная толщина материала заменяется на переменную плотность, а материал вдоль оси  $z$  считается сплошным с одинаковой плотностью. Такое приближение является противоположным описанному во Введении способу расчета, когда материал линзы, наоборот, сжимается в линию с переменной плотностью, а все пространство периода является пустым. Наличие двух противоположных приближений позволяет легко оценивать точность расчетов по условию, чтобы оба приближения давали один и тот же ответ с небольшими отклонениями. Это действительно почти всегда происходит.

В [4] показано, что траектория лучей внутри длинной СПЛ описывается уравнением

$$\begin{aligned} x(z) &= x_0 \cos(z/L_c) + \theta_0 L_c \sin(z/L_c), \\ L_c &= (p_i R / 2\delta)^{1/2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x_0$  и  $\theta_0$  – начальные координата и угол луча, т.е. при входе в СПЛ, когда  $z = 0$ . Для угла тоже существует уравнение

$$\theta(z) = dx/dz = \theta_0 \cos(z/L_c) - (x_0/L_c) \sin(z/L_c). \quad (2)$$

Пусть точечный источник СИ расположен на расстоянии  $z_s$  от начала СПЛ и сдвинут от оси  $z$  на расстояние  $x_s$ . Тогда  $\theta_0 = (x_0 - x_s)/z_s$  и произвольной остается только координата  $x_0$  при условии, что  $|x_0| < x_a$ . Очевидно, что траектории лучей внутри СПЛ не должны выходить за пределы апертуры, т.е. должно выполняться условие  $|x(z)| < x_a$  во всем интервале  $0 < z < L$ .

Следует различать три случая. Первый – когда координата источника  $x_s$  находится в пределах размера апертуры СПЛ, т.е.  $|x_s| < x_a$ . Тогда фокусируемые лучи внутри линзы сначала расходятся и нужно проследить, чтобы точки поворота расходимости на сходимость располагались внутри СПЛ. Если это не так, то луч выйдет за пределы апертуры СПЛ. Достаточно поставить щель, равную апертуре СПЛ, в конце СПЛ, и такой луч далее не пройдет. В этом случае из уравнения (1) определяем интервал допустимых значений координаты  $x_0$ . Подставляя в (1) зависимость  $\theta_0$  от позиции источника, получаем уравнение

$$x(z) = x_0 \cos(z/L_c) + (x_0 - x_s)(L_c/z_s) \sin(z/L_c). \quad (3)$$

Необходимо определить точки минимума и максимума этой функции. Как известно, в этих точках производная по  $z$  равна 0. Соответственно получаем уравнение, из которого определяем координату  $z$ , где происходит поворот лучей из расходимости в сходимость,

$$z = L_c \operatorname{arctg}(u_s(x_0 - x_s)/x_0), \quad u_s = L_c/z_s. \quad (4)$$

Это значение подставим в (3) и определим такие значения  $x_0$ , при которых  $x(z) = \pm x_a$ . Затем их подставим в (4) и убедимся, что значение  $z$  находится в интервале от 0 до  $L$ . Очевидно, что всегда  $z > 0$ , но может быть так, что  $z > L$ . Тогда СПЛ не будет фокусировать. Удобно ввести переменную  $x$  из условия  $x_0 = x_s + x$  и рассмотреть функции

$$\begin{aligned} F_{u,d}(x) &= \pm x_a - (x_s + x) \cos(a) - (x u_s) \sin(a), \\ a &= \operatorname{arctg}(u_s x / (x_s + x)). \end{aligned} \quad (5)$$

Затем определим точки, где эти функции равны нулю внутри интервала от  $-(x_a + x_s)$  до  $x_a - x_s$ . Соответственно получаем входные точки  $x_{0u,d}$  и легко находим выходные точки  $x_{1u,d}$  из (3) при  $z = L$ .

Во втором случае, когда  $x_s > x_a$ , верхняя точка точно известна. Она равна  $x_{0u} = x_a$ . Также точно известен угол  $\theta_{0u} = (x_a - x_s)/z_s$  и он отрицательный. Необходимо проверить, чтобы выходная точка  $x_{1u} = x_{0u} C_L + \theta_{0u} L_c S_L$ , где  $C_L = \cos(u)$ ,  $S_L = \sin(u)$ , была больше  $-x_a$ , т.е. луч не пересекал край апертуры внутри СПЛ. Здесь и далее  $u = L/L_c$ . Если после конца линзы стоит щель, то такой луч не пройдет. Для нижней точки условие остается как в первом случае. Третий случай противоположен второму, т.е. он реализуется, когда  $x_s < -x_a$ . Здесь просто верх и низ меняются местами.

Такой анализ позволяет, в частности, определить кривую качания СПЛ, т.е. область всех возможных значений  $x_s$  для заданного расстояния  $z_s$ . После того, как определили две пары значений  $x_{0u,d}$  и  $\theta_{0u,d}$ , легко вычисляем две пары значений  $x_{1u,d}$  и  $\theta_{1u,d}$  из (1), (2) при  $z = L$ . Изображение источника с помощью длинной СПЛ находится на пересечении двух лучей, которые определяются этими парами значений. Для этого решим уравнение

$$x_{1u} + \theta_{1u} z = x_{1d} + \theta_{1d} z, \quad (6)$$

из которого находим фокусное расстояние  $z_f$ , отсчитываемое от конца СПЛ, и сдвиг точки изображения источника  $x_f$  от оси  $z$

$$\begin{aligned} z_f &= A_l / (\theta_{1d} - \theta_{1u}), \\ A_l &= x_{1u} - x_{1d}, \quad x_f = x_{1u} + \theta_{1u} z_f. \end{aligned} \quad (7)$$

В случае короткой СПЛ, когда  $L \ll L_c$ , указанные уравнения дают известный результат. При  $u \ll 1$  можно использовать приближение  $\cos(u) = 1$ ,  $\sin(u) = u$ . Более того, можно использовать приближение  $x_{0u,d} = \pm x_a$ . В таком же приближении  $x_{1u,d} = \pm A/2$ . То есть апертура на выходе не меняется. Однако углы меняются и второй член тут имеет значение не меньше первого, т.е.

$$\theta_{1d,u} = \pm x_a \left( L/L_c^2 - 1/z_s \right) - x_s/z_s. \quad (8)$$

Подставляя это в (9), получаем

$$\begin{aligned} z_f &= (Z_f^{-1} - z_s^{-1})^{-1}, \quad x_f = -x_s z_f / z_s, \\ Z_f &= L_c^2 / L = R / (2n\delta). \end{aligned} \quad (9)$$

Эти формулы широко используются при расчетах фокусировки короткой СПЛ.

Итак, геометрическая оптика дает весьма полезную информацию, а именно пределы области  $(x_{1d}, x_{1u})$ , из которой ВФИ фокусируется при дальнейшем распространении в пустом пространстве. Также известны углы  $\theta_{1u,d}$ , которые лучи в этих пределах образуют с осью  $z$ . Они дают производную от фазы по  $x$  согласно известному правилу  $d\phi/dx = (2\pi/\lambda)\theta$ . Используя это правило, легко определить ВФИ на выходе из СПЛ в том случае, когда поглощение равно нулю:

$$\psi(x) = (A_0/A_1)^{1/2} \exp(i\phi(x))\theta(x_{1a} - |x - x_{1c}|), \quad (10)$$

$$\phi(x) = a(2x_f x - x^2), \quad (11)$$

$$A_0 = x_{0u} - x_{0d}, \quad a = \pi/(\lambda z_f).$$

Здесь  $x_{1a} = A_1/2$ ,  $x_{1c} = (x_{1u} + x_{1d})/2$ ,  $\theta(x)$  есть функция Хевисайда, равная нулю, если  $x < 0$ , и единице, если  $x > 0$ , а параметры  $z_f$  и  $x_f$  определены в (7). Фаза выписана без учета постоянного члена, не влияющего на интенсивность. Множитель перед экспонентой учитывает плотность лучей. Если нормировка ВФИ такова, что интенсивность равна единице при входе в СПЛ, то на выходе интегральная интенсивность не может измениться, если нет поглощения. Следовательно, амплитуда ВФИ возрастает, если область засветки уменьшается.

ВФИ на фокусном расстоянии  $z_f$  от конца СПЛ определяется сверткой функции (10) с пропагатором Френеля:

$$\psi_f(x) = (A_0/A_1)^{1/2} C_0 \int dx_1 \exp(ia[x - x_1]^2) \psi(x_1), \quad (12)$$

$$C_0 = (i\lambda z_f)^{-1/2}.$$

Интеграл вычисляется аналитически и равен

$$\psi_f(x) = (A_0 A_1)^{1/2} C_0 C_p(x) F_0(a A_1 [x - x_f]), \quad (13)$$

$$C_p(x) = \exp(ia[x^2 - 2(x - x_f)x_{1c}]), \quad (14)$$

$$F_0(u) = \sin(u)/u.$$

Функция  $F_0^2(u)$  равна  $1/2$  при  $u = C_h$ ,  $C_h = 1.3915574$ . Поэтому полуширина пика равна  $w_f = 2C_h\lambda z_f/\pi A_1 = 0.8859 \lambda/\alpha$ . Здесь  $\alpha = A_1/z_f$  есть угловая ширина пучка, который фокусируется. Легко убедиться, что интеграл в бесконечных пределах от интенсивности  $I_f(x) = |\psi_f(x)|^2$  равен  $A_0$ , т.е. закон сохранения энергии выполняется. А максимальное значение интенсивности равно  $I_{fma} = I_f(x_f) = A_0 A_1 / \lambda z_f$ . Произведение  $I_{fma} w_f = 0.8859 A_0$ .

Интересно, что согласно (7)  $\alpha = \theta_{1d} - \theta_{1u}$ , т.е. угловая ширина реально определяется как разность максимального и минимального углов, которые лучи составляют с осью  $z$ . Чем больше угловая ширина фокусируемого пучка, тем меньше размер пучка в фокусе. При этом не важно, где формируется эта угловая ширина, в самой СПЛ или за ее пределами. Результат не зависит от ширины пучка на выходе из СПЛ. Иногда бывает выгодно сделать СПЛ короче с тем же результатом фокусировки.

## УЧЕТ ПОГЛОЩЕНИЯ В ДЛИННОЙ СПЛ

Полного отсутствия поглощения в длинной СПЛ можно достичь только при очень малой апертуре и очень высоких энергиях фотонов для

материалов, состоящих из легких атомов. В реальных ситуациях поглощение всегда присутствует. Вообще говоря, в геометрической оптике есть два способа расчета фазы. В СПЛ материал постепенно параболически изменяет толщину материала при неизменной плотности. Локально фаза изменяется только там, где есть вещества. Можно было бы вычислить длину той части траектории, где лучи проходят по веществу и умножить ее на коэффициент  $2\pi\delta/\lambda$ . Но поглощение происходит на тех же участках траектории. Следовательно, суммарное поглощение должно быть пропорционально фазе, по этой причине комплексную фазу легко получить после ее умножения на  $(1 - i\gamma)$ , где  $\gamma = \beta/\delta$ . Именно так и поступают при расчете коротких СПЛ.

Однако численные расчеты показывают, что это неправильно для длинной СПЛ. Геометрическая оптика, согласованная с пропагатором длинной СПЛ, правильно вычисляет фазу, но поглощение получается другим и оно больше, чем дает описанный выше подход. Анализ результатов численных расчетов показал, что расчеты на основе пропагатора длинной СПЛ не учитывают апертуру, но правильно дают и фазу ВФИ, и поглощение. Расчет ВФИ на конце длинной СПЛ для точечного источника был выполнен в [3]. Используя формулы (17) и (18) из этой статьи, ответ можно записать в виде экспоненты с комплексными коэффициентами:

$$\psi(x) = \exp(ia_0 + ia_1 x + ia_2 x^2), \quad (15)$$

$$a_0 = (\pi c_L/\lambda r_g) x_s^2 - 2\pi\eta d_L n_l/\lambda - i \log(z_s/r_g)/2, \quad (16)$$

$$\eta = \delta(1 - i\gamma),$$

$$a_1 = -2\pi x_s/\lambda r_g, \quad a_2 = (\pi/\lambda r_g)(c_L - s_L z_s/z_c), \quad (17)$$

$$r_g = z_s c_L + z_c s_L.$$

Здесь и далее используются комплексные параметры  $z_c = L_c(1 - i\gamma)^{-1/2}$  и  $c_L, s_L$ . Последние отличаются от параметров  $C_L, S_L$  заменой в аргументе  $L_c$  на  $z_c$ .

В аргументе экспоненты в (15) указан также член, не зависящий от  $x$ . Реальная часть коэффициента  $a_0$  дает постоянную фазу, которая не влияет на регистрируемую интенсивность. Однако его мнимая часть влияет, и это важно. К ней также добавлен член, описывающий поглощение на тонких частях периода, которые не участвуют в процессе фокусировки, но поглощают СИ. Интересно, что дополнительное поглощение возникает и в том случае, когда источник не находится на оси СПЛ. Можно показать, что в отсутствие поглощения ВФИ (14) совпадает с ВФИ (10) с точностью до постоянной фазы и множителя, определяющего сжатие апертуры. Именно этот мно-

житель невозможно получить с помощью пропагатора СПЛ.

В [5] попытались использовать пропагатор только в пределах СПЛ, а перед СПЛ поставить щель, размер которой равен размеру апертуры. Более того, интеграл в пределах апертуры был приближенно вычислен методом стационарной фазы с целью получить аналитическое решение. Как оказалось, такое решение годится только для плоской падающей волны, так как оно не учитывает фазу падающего излучения, хотя и учитывает приближенно сжатие апертуры. Можно получить результат в более общем виде, т.е. для точечного источника с параметрами  $z_s$  и  $x_s$ . Такой результат должен заменить формулу (16) статьи [5]. Запишем его в виде, аналогичном (14), а именно

$$\psi(x, L) = \exp\left(ia_0 + ia_1 x + ia_2 x^2\right) A(x_1), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} a_0 &= -(\pi/x_L^2)(bx_s)^2/(c_L + b) - \\ &- 2\pi\eta d_L n_l/\lambda + i \log(c_L + b)/2, \end{aligned} \quad (19)$$

$$x_L = (\lambda z_c s_L)^{1/2},$$

$$a_1 = -(\pi/x_L^2)2bx_s/(c_L + b), \quad (20)$$

$$a_2 = (\pi/x_L^2)[c_L - 1/(c_L + b)], \quad b = x_L^2/\lambda z_s.$$

Хотя коэффициенты в аргументе экспоненты записаны в другом виде, их смысл будет разъяснен далее, они точно совпадают с теми, которые выписаны в (16), (17). Заметим, что доказать это для коэффициента  $a_2$  не просто, но можно. Проще всего это проверить численно.

Главное отличие формулы (18) от формулы (15) в том, что результат может зависеть от амплитуды ВФИ на входе, т.е. функции  $A(x)$ , которая не обязательно должна быть равна единице. В (15) предполагалось, что она равна единице, и интеграл вычислялся в бесконечных пределах. В (18) фаза ВФИ от точечного источника учтена, а амплитуда может быть произвольной, в частности она может ограничивать падающую на СПЛ волну апертурой. Важно, что для каждой точки  $x$  существует такая точка  $x_1$ , в которой и надо учитывать амплитуду. Она определяется формулой

$$x_1 = (x + bx_s)/(c_L + b). \quad (21)$$

Для амплитуды в этой формуле можно пренебречь поглощением, т.е. считать, что  $\gamma = 0$ . Аргумент экспоненты также вычислялся в этой точке, потому запись коэффициентов в (19), (20) отличается от (16), (17). Формула (21) показывает, в частности, как трансформируется апертура при прохождении ВФИ внутри СПЛ от входа к выходу.

В программе XRWP метод расчета, основанный на формулах (15)–(17), имеет номер 1, а метод расчета на основе формул (18)–(20) имеет номер 3. Если метод 1 никак не учитывает реальную апертуру, то метод 3 учитывает ее относительно

неплохо, если источник находится на оси СПЛ и расстояние существенно превышает длину СПЛ. Но самый правильный учет апертуры делается по формулам (9)–(11). При этом фаза ВФИ фактически должна быть такой же, как в методах 1 и 3, а главным отличием являются параметры  $A_0$  и  $A_1$ , т.е. размер пучка на входе в СПЛ и на выходе из СПЛ. Для удобства расчетов выпишем реальную и мнимую части коэффициентов в аргументе экспоненты в явном виде, причем с учетом малости параметра  $\gamma$  мнимую часть достаточно вычислить в линейном по  $\gamma$  приближении. Итак,

$$a_{2r} = -a, \quad a_{2i} = Ga_{2r}, \quad (22)$$

$$G = -(\gamma/2)(C_1 + [uC_3 + C_2/S_L]/C_4),$$

$$a_{1r} = 2x_f a, \quad a_{1i} = -(\gamma/2)C_2 a_{1r}, \quad a_{0r} = 0, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} a_{0i} &= (\gamma/2)(\pi/\lambda) \left[ (x_s/z_s)^2 L_c S_L (C_2 - C_1)/C_3 + 4\delta d_L n_l \right] \\ &+ \log(C_3)/2, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} C_1 &= 1 - uC_L/S_L, \quad C_2 = (S_L(u + u_s) - C_L u u_s)/C_3, \\ C_3 &= C_L + u_s S_L, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} C_4 &= S_L - u_s C_L, \quad z_f = L_c C_3/C_4, \\ x_f &= -z_f (x_s/z_s)/C_3. \end{aligned} \quad (26)$$

Параметр  $a$  определен в (11). Метод расчета по формулам (10), (11), (22)–(26) в программе XRWP имеет номер 5. Он как раз представляет собой новый вариант теории.

Отметим, что такие параметры, как  $z_f$ ,  $x_f$ ,  $A_1/A_0 = C_3$ , не зависят от апертуры. По этой причине для них существуют формулы (25), (26), а их расчет через координаты и углы лучей точно совпадает с расчетом по этим формулам. То есть используемая геометрическая оптика полностью согласована с пропагатором длинной СПЛ. Волновая функция излучения на фокусном расстоянии теперь определяется более сложным интегралом, который перепишем в виде

$$\psi_f(x) = C_0 \int dx_1 \exp\left(ia[x - x_1]^2\right) \psi_1(x_1) \psi_2(x_1), \quad (27)$$

$$\psi_1(x) = \exp\left(ia[2x_f x - x^2]\right) \theta(x_{1a} - |x - x_{1c}|), \quad (28)$$

$$\psi_2(x) = \exp\left(-a_{0i} - a_{1i}x - a_{2i}x^2\right). \quad (29)$$

Параметр  $C_0$  определен в (12). В отличие от (12) интеграл в (27) аналитически не вычисляется. Его можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \psi_f(x) &= (A_1/2) C_0 C_p(x) \psi_2(x_{1c}) \\ &\times \int du E(x, u) \theta(1 - |u|), \end{aligned} \quad (30)$$

$$E(x, u) = \exp\left(-iaA_1[x - x_f]u - hu - gu^2\right), \quad (31)$$

$$h = A_1(a_{1i}/2 + a_{2i}x_{1c}), \quad g = a_{2i}A_1^2/4. \quad (32)$$

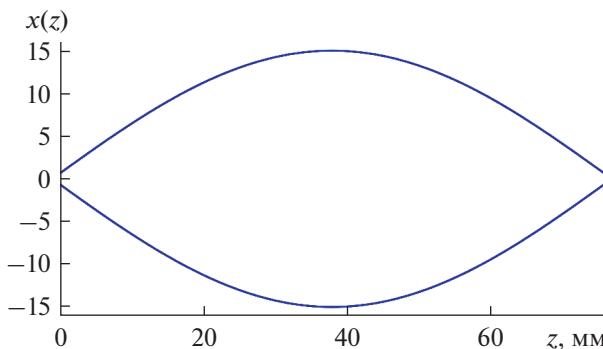


Рис. 2. Траектории лучей, ограничивающих фокусируемую часть пучка синхротронного излучения для линзы с параметрами:  $A = 30$  мкм,  $p_l = 62$  мкм,  $d_l = 2$  мкм,  $R = 3.75$  мкм,  $n_l = 1248$  и энергией фотонов 50 кэВ.

Если поглощения нет, то учитывая, что  $\psi_2(0) = (A_0/A_1)^{1/2}$ ,  $h = g = 0$ , получаем формулу (13).

Более простой случай с поглощением получается при  $x_s = 0$ . В этом случае  $x_f = 0$ , т.е.  $a_{1r} = a_{1i} = x_{1c} = 0$ , и интеграл преобразуется к виду

$$\int du E(x, u) \theta(1 - |u|) = 2F(u_0), \quad u_0 = aA_1 x, \quad (33)$$

$$F(u_0) = \int du \cos(u_0 u) \exp(-gu^2) \theta(u[1 - u]). \quad (34)$$

Функция  $F(u_0)$  подробно исследовалась в [4, 8]. Полуширина  $w(g)$  кривой  $F^2(u_0)$  определяет полуширина  $w_f$  пучка СИ в фокусе. Были получены следующие аппроксимации:  $w(g) = 2.783 + 0.498 g$  в интервале значений  $g$  от 0 до 6 и  $w(g) = 2.355 g^{1/2}$  для  $g > 6$ . То есть получается так, что наличие поглощения при заданном размере апертуры приводит к увеличению поперечного размера пучка СИ в фокусе. А уменьшение апертуры тоже увеличивает размер, так как

$$w_f = w(g)/(aA_1). \quad (35)$$

## РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Рассмотрим пример применения нового варианта теории. Пусть СПЛ имеет следующие параметры:  $A = 30$  мкм,  $p_l = 62$  мкм,  $d_l = 2$  мкм,  $R = 3.75$  мкм. Эксперимент с такой СПЛ впервые был представлен в [9]. Пусть энергия фотонов равна 50 кэВ ( $\lambda = 0.0248$  нм), тогда  $L_c = 2.4637$  см. Наиболее экзотическим случаем является такой, в котором СПЛ фокусирует на своем конце точечный источник, размещенный в ее начале. Это возможно при  $L = \pi L_c = 77.399$  мм. То есть указанная СПЛ должна иметь  $n_l = 1248$  периодов, что дает значение  $L = 77.376$  мм, которое наиболее близко соответствует нужному. Но это не очень удобно для анализа, поэтому рассмотрим чуть более простой

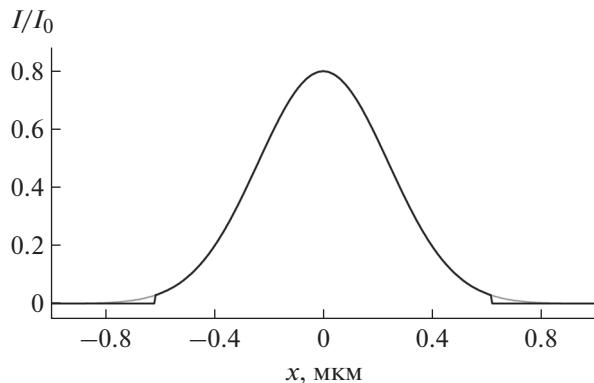
случай, когда  $z_s = 1$  мм и  $n_l = 1216$ . При этом  $L = 75.392$  мм и  $z_f = 1.0093$  мм.

Траектория лучей, ограничивающих пучок в СПЛ, показана на рис. 2. Максимальный размер, равный апертуре СПЛ, пучок имеет в середине, как это следует из симметрии задачи. Легко заметить, что в начале и в конце траектории почти прямые, т.е. в середине апертуры СПЛ преломление лучей очень слабое. Сильное изменение траектории происходит только на краях апертуры, где СИ поглощается наиболее сильно. Очевидно, что левая половина такой СПЛ превращает расходящееся излучение от точечного источника вблизи передней части СПЛ в параллельный пучок, а правая часть, наоборот, фокусирует параллельный пучок вблизи своей задней части. В обоих случаях число периодов в 2 раза меньше, но все равно велико.

На рис. 3 показано распределение интенсивности, т.е. квадрат модуля ВФИ, на выходной грани СПЛ. Все расчеты сделаны с помощью программы XRWP [7]. Расчет выполнен двумя методами, а именно методом 5 (черная кривая), впервые представленным в настоящей работе, методом 3 (серая кривая), который был описан в [5], но только для плоской падающей волны, и представлен здесь в более общем случае точечного источника. В методе 3 апертура СПЛ не учитывается точно, а формально может быть учтена правильным выбором щели перед входом в СПЛ, если источник расположен на оси СПЛ. Но в данном случае щель равнялась 2 мкм и это больше, чем следует из расчетов. По этой причине серая кривая отличается от черной кривой на хвостах, т.е. за пределами размера пучка, который точно определяется в методе 5. Интересно, что в этом случае результаты для методов 1 и 3 совпадают, так как на щели размером 2 мкм пучок полностью поглощается.

Поглощение в методе 5 используется в линейном по параметру  $\gamma$  приближении для мнимых частей коэффициентов в аргументе экспоненты. Но численно кривая метода 5 практически полностью совпадает с кривой метода 3 в центре пика. Что касается методов 2 и 4, в которых вычисляется интеграл свертки с пропагатором, то они в этом частном случае не дают правильных результатов. Одной из причин является то, что входная ВФИ очень сильно осциллирует, и численный метод быстрого преобразования Фурье [10] не способен дать правильный ответ. Отметим, что большое число итераций в методе 2 и очень сложный вид пропагатора в методе 4 тоже создают проблемы. Поэтому для рассматриваемого случая применимы только аналитические методы.

Интенсивность пучка на выходе из СПЛ нормируется на интенсивность на входе. Так как размер пучка на выходе совпадает с размером пучка



**Рис. 3.** Распределение относительной интенсивности излучения на выходной грани линзы для параметров, указанных в подписи к рис. 2, рассчитанное двумя методами программы XRWP, а именно методом 5 (чёрная кривая) и методом 3 (серая кривая).

на входе, то различие связано лишь с уменьшением интенсивности за счет поглощения на тонких частях материала в середине периодов, т.е. при умножении на коэффициент  $\exp(-4\pi\beta d n_i/\lambda)$ . Популируя пучка в фокусе легко вычислить по формуле (35), используя значения параметров  $A_1 = 1.228$  мкм,  $g = 1.654$ . В результате получаем  $w_f = 23.4$  нм. Параметр  $w_c$ , указанный во Введении, в данном случае равен 20.0 нм. Видно, как поглощение в СПЛ приводит к результату выше установленного ранее предела.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Впервые развит адекватный метод учета апертуры длинных СПЛ на основе геометрической оптики, согласованной с пропагатором длинной СПЛ, который был получен в [2, 3] более 20 лет назад. Метод учета апертуры не является прямым, но все расчеты выполняются весьма быстро. Получены аналитические формулы для ВФИ на выходе из СПЛ в случае СИ от точечного источника с учетом сдвига от оси СПЛ, что позволяет вычислять кривую качания длинных СПЛ более точно, чем это делалось ранее.

Рассмотренный численный пример является демонстрационным. Он не охватывает всего кру-

га вопросов, связанных с нанофокусировкой СИ с помощью СПЛ. Вместе с тем он показывает преимущества аналитической теории перед численными методами, которые не всегда можно выполнить стандартными способами. Большим преимуществом аналитических формул является также возможность быстрого и легкого выбора интересных и полезных вариантов для реализации нужных эффектов.

Более подробный анализ фокусировки как с помощью длинных СПЛ при высоких энергиях, так и каскадных СПЛ, в которых апертура является переменной величиной, будет сделан в будущем. Важно, что найден способ аккуратного учета апертуры длинных СПЛ достаточно простыми средствами.

Работа проведена в рамках выполнения государственного задания НИЦ “Курчатовский институт”.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Snigirev A., Kohn V., Snigireva I. et al.* // *Nature*. 1996. V. 384. P. 49. <https://doi.org/10.1038/384049a0>
2. Кон В.Г. // Письма в ЖЭТФ. 2002. Т. 76. № 10. С. 701.
3. Кон В.Г. // ЖЭТФ. 2003. Т. 124. № 1. С. 234.
4. *Kohn V.G., Folomeshkin M.S.* // *J. Synchrotron Rad.* 2021. V. 28. P. 419. <https://doi.org/10.1107/S1600577520016495>
5. *Kohn V.G.* // *J. Synchrotron Rad.* 2022. V. 29. P. 615. <https://doi.org/10.1107/S1600577522001345>
6. *Bergemann C., Keymeulen H., van der Veen J.F.* // *Phys. Rev. Lett.* 2003. V. 91. № 20. P. 204801. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.204801>
7. Кон В.Г. // Сайт компьютерной программы XRWP (2024). <https://xray-optics.ucoz.ru/XR/xrwp.htm>
8. Кон В.Г., Фоломешкин М.С. // Российские нанотехнологии. 2022. Т. 17. № 1. С. 125. <https://doi.org/10.56304/S1992722322010083>
9. *Snigirev A., Snigireva I., Lyubomirskiy M. et al.* // *Opt. Express*. 2014. V. 22. № 21. P. 25842. <https://doi.org/10.1117/12.2061616>
10. *Cooley W., Tukey J. W.* // *Math. Comp.* 1965. V. 19. P. 297.