

УДК 621.38+548.732+535.317

НОВЫЙ ВАРИАНТ ТЕОРИИ НАНОФОКУСИРОВКИ ПУЧКОВ ЖЕСТКОГО СИНХРОТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛИННОЙ СОСТАВНОЙ ПРЕЛОМЛЯЮЩЕЙ ЛИНЗОЙ. II

© 2026 г. В. Г. Кош^{1,*}¹Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, Москва, Россия

*E-mail: kohnvict@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.12.2025 г.

После доработки 10.12.2025 г.

Принята к публикации 31.01.2026 г.

Рассмотрены два аспекта нового варианта теории нанофокусировки синхротронного излучения (СИ) в нанометровый поперечный размер с использованием длинной составной преломляющей линзы (СПЛ). Во-первых, разработан метод расчета кривой качания, которая отличается от функции Гаусса и зависит от реального размера апертуры СПЛ. Во-вторых, предложен новый способ расчета трансформации волновой функции при прохождении СИ по воздуху после фокусировки в СПЛ, в том числе в области вблизи фокусного расстояния. Новый способ основан на аналитическом представлении интеграла Гюйгенса–Френеля через комплексный интеграл Френеля. Он дает результат за то же время или даже быстрее, чем метод на основе преобразования Фурье, и является более простым и устойчивым.

DOI: 10.56304/S199272232660011X

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассмотрены новые аспекты теории нанофокусировки пучков жесткого синхротронного излучения (СИ) длинной составной преломляющей линзой (СПЛ), основы которой представлены в [1]. Новым элементом теории является учет апертуры длинной СПЛ вместе с аналитической формулой для пропагатора СПЛ [2, 3], которая апертуру не учитывает. Для СПЛ с большой апертурой и для относительно низкой энергии фотонов СИ (5–15 кэВ) апертура не влияет на результат, так как пучок СИ полностью поглощается на краях апертуры и степень фокусировки зависит от эффективной апертуры, которая определяется поглощением. Ранее было показано [4, 5], что фокусировка в минимальный размер (два десятка нанометров [6]) возможна только для СПЛ с малой апертурой и при высоких энергиях фотонов (более 30 кэВ), когда поглощение становится весьма слабым. В этом случае теория без учета апертуры показывает сильно завышенную степень фокусировки. Для получения реалистичных результатов апертуру необходимо учитывать.

Частично апертуру СПЛ предлагалось учитывать, закрывая пучок СИ за пределами апертуры щелью, установленной перед СПЛ [7], но это хорошо работает лишь в случае очень больших расстояний от источника СИ до СПЛ. На источниках СИ третьего и четвертого поколений [8] рас-

стояния от источника до экспериментальной станции большие, но если СПЛ фокусирует вторичный источник в фокусе другой СПЛ, то такой прием не сработает. Размер пучка на входе в СПЛ в этом случае меньше апертуры, а максимальный размер пучка находится внутри СПЛ (рис. 1а). Проблемы возникают также при расчете кривой качания СПЛ, когда пучок входит в СПЛ под большим углом. Новый вариант теории решает эти проблемы с приемлемой точностью.

Другая проблема состоит в расчете размера пучка и его структуры на фокусном расстоянии. Вычислять перенос волновой функции излучения по воздуху можно разными способами. Частично эта проблема обсуждается в [9], где сравниваются три метода расчета: метод Рунге–Кутты для решения дифференциальных уравнений; метод ориентированных гауссовых пучков; метод Гюйгенса–Френеля с вычислением интеграла процедурой быстрого преобразования Фурье (БПФ) [10]. Показано, что третий метод дает ответ во много раз быстрее второго, а первый вообще не дееспособен. Этот вывод, вообще говоря, давно известен и практически все авторы используют процедуру БПФ для расчетов когерентной оптики СИ. Но и у метода БПФ есть проблемы, которые обсуждаются в разделе Новый метод расчета волновой функции СИ после СПЛ.

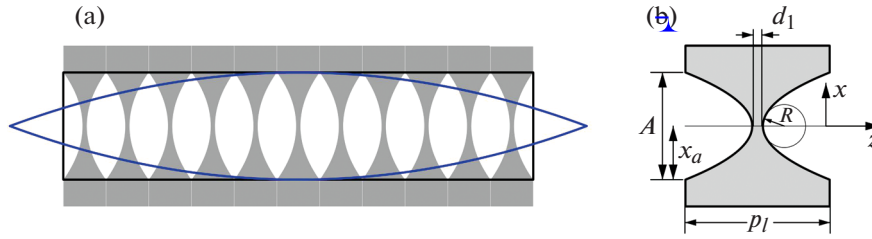


Рис. 1. Общий вид СПЛ как периодической структуры и траектория лучей внутри СПЛ (а). Параметры одного периода, где A – апертура, $x_a = A/2$, R – радиус кривизны параболической поверхности, d_1 – толщина тонкой части, p_l – длина периода, и оси координат (б).

В данной работе предложен новый способ расчета, который не является универсальным, но применим для вычисления размеров пучка СИ после СПЛ. Он является быстрым и максимально точным. В нем интеграл Гюйгенса–Френеля выражается через комплексный интеграл Френеля от комплексного аргумента. Предложен способ быстрого расчета такого интеграла.

ОСНОВЫ НОВОГО ВАРИАНТА ТЕОРИИ

На рис. 1а показан общий вид длинной СПЛ и выделена фокусирующая область, имеющая высоту, равную апертуре A , и длину $L = p_l n_l$, где p_l – длина одного периода, n_l – число периодов. На рис. 1б показаны основные параметры одного периода, в том числе радиус кривизны вогнутых параболических поверхностей R и толщина самой тонкой части d_1 в середине периода. При этом $p_l = x_a^2/R + d_1$, где $x_a = A/2$. Также показаны оси координат, используемые в расчетах. В аналитической теории [2, 3] переменная толщина материала заменяется на переменную плотность, а материал вдоль оси z считается сплошным, т.е. его плотность не зависит от z .

Для задачи в такой постановке удалось получить пропагатор СПЛ в виде $\exp(ib_0 + ib_1(x^2 + x_1^2) + ib_2 x x_1)$, где x – координата на выходной поверхности СПЛ, x_1 – координата на входной поверхности, b_0, b_1, b_2 – известные комплексные коэффициенты. Если на СПЛ падает излучение от точечного источника с координатами x_s и z_s , то в параксиальном приближении волновая функция равна экспоненте, аргумент которой пропорционален x_1^2 , и интеграл от произведения пропагатора на такую функцию имеет вид $\exp(ia_0 + ia_1 x + ia_2 x^2)$ с новыми комплексными коэффициентами, которые вычисляются аналитически. При этом предполагается, что у СПЛ нет апертуры, так как она не входит в результат.

Учесть апертуру позволяет геометрическая оптика в том же самом приближении сплошной сре-

ды с неоднородной по оси x плотностью. Показано, что траектория лучей внутри длинной СПЛ описывается уравнением

$$x(z) = x_0 \cos(z/L_c) + \theta_0 L_c \sin(z/L_c), \quad (1)$$

$$L_c = (p_l R / 2\delta)^{1/2},$$

где x_0 и θ_0 – начальные координата и угол луча при входе в СПЛ, когда $z = 0$, т.е. координата z отсчитывается от начала СПЛ. Комплексный коэффициент преломления среды записывается в виде $n = 1 - \delta + i\beta$. Для угла между лучом и осью z тоже существует уравнение

$$\theta(z) = dx/dz = \theta_0 \cos(z/L_c) - (x_0/L_c) \sin(z/L_c). \quad (2)$$

Используя эти уравнения, можно вычислить такие траектории лучей, которые нигде не выйдут за пределы апертуры, но являются крайними в том смысле, что в какой-то точке они касаются краев апертуры.

Такие траектории и определяют ширину пучка на входе A_0 и на выходе A_1 СПЛ. Окончательное выражение для волновой функции на выходе из СПЛ имеет вид

$$\psi_0(x) = (A_0/A_1)^{1/2} \exp(ia_0 + ia_1 x + ia_2 x^2) \times \theta(x_1 - |x - x_0|), \quad (3)$$

где $x_1 = A_1/2$, x_0 – центральная точка области с шириной A_1 , $\theta(x)$ – функция Хевисайда, равная нулю, если $x < 0$, и единице, если $x > 0$. Действительная часть параметра a_0 не влияет на интенсивность, но мнимую часть необходимо учитывать. Явный вид коэффициентов выписан в [1]. Волновая функция $\psi_1(x, z)$ на расстоянии z от конца СПЛ равна свертке $\psi_0(x)$ с пропагатором Френеля

$$\psi_1(x, z) = (i\lambda z)^{-1/2} \int dx_1 \exp(i\pi[x - x_1]^2 / \lambda z) \psi_0(x_1). \quad (4)$$

Новый метод расчета такого интеграла с учетом явного вида (3) для функции $\psi_0(x)$ рассмотрен в разделе Новый метод расчета волновой функции СИ после СПЛ.

КРИВАЯ КАЧАНИЯ ДЛИННОЙ СПЛ

Длинная СПЛ является не только фокусирующим, но и коллимирующим элементом в том смысле, что если на нее падает сходящееся СИ в широком угловом интервале, то на выходе остается СИ из меньшего углового интервала. Или, если между осью СПЛ и осью z есть угол $\alpha > 0$, то интегральная интенсивность СИ на выходе из СПЛ будет зависеть от этого угла. Эту зависимость называют кривой качания. Впервые кривая качания длинной СПЛ с большой апертурой была измерена в [11] на источнике СИ ESRF (г. Гренобль, Франция). В то время подробной теории не было, использовалась только примитивная геометрическая оптика для оценки ширины кривой. Теория появилась в [12] много лет спустя, и ее результаты хорошо совпали с результатом в [11]. Показано, что кривая качания для СПЛ представляет собой функцию Гаусса в случае, когда реальная апертура не играет роли из-за поглощения, и получена формула для вычисления полуширины этой функции. Более того, существует онлайн-программа [13], которая вычисляет ее вместе с другими параметрами пучка СИ после фокусировки пучка СИ с помощью СПЛ.

Недавно кривая качания планарной почти нанофокусирующей СПЛ была измерена на источнике КИСИ-Курчатов (г. Москва) при энергии фотонов 18 кэВ, когда поглощение еще велико [14]. Результаты снова совпали с теорией без учета апертуры. Новая программа для расчета кривой качания с учетом апертуры создана как часть универсальной программы XRWP [15]. Рассмотрим пример применения этой программы для случая, когда апертура существенно влияет на результат. Пусть параметры СПЛ соответствуют изготовленной линзе [16] с апертурой $A = 30$ мкм. Эта СПЛ имеет следующие параметры: $p_l = 62$ мкм, $d_l = 2$ мкм, $R = 3.75$ мкм. Пусть энергия фотонов равна 50 кэВ ($\lambda = 0.0248$ нм), СПЛ имеет 400 элементов, а расстояние до источника $z_s = 13$ м.

В этом случае длина СПЛ равна $L = 2.48$ см, $L_c = 2.46$ см. Так как углы малы, тангенс равен его аргументу с большой точностью. Расчет с учетом чистой геометрии без преломления лучей дает максимальный угол отклонения луча $\alpha_m = A/L = 1.21$ мрад. Соответственно, максимальное смещение источника равно $x_{sm} = z_s A/L = 15.7$ мм. Угловая область пропускания длинной СПЛ в 2 раза больше, т.е. $\Delta\alpha_g = 2.42$ мрад. Онлайн-программа [13] дает для этого случая полуширину функции Гаусса $\Delta\alpha_{op} = 2.13$ мрад. Это чуть меньше, но необходимо учесть, что это ширина на половине высоты, максимальная ширина существенно больше по той причине, что эффективная апертура из-за поглощения больше реальной апертуры.

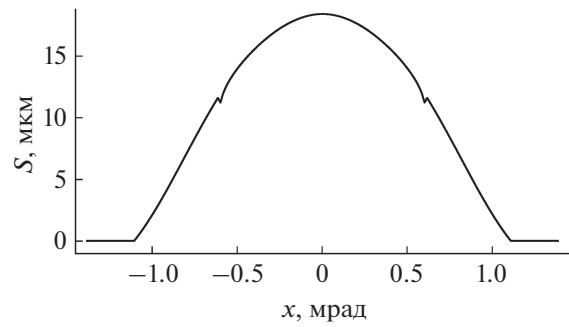


Рис. 2. Кривая качания СПЛ при $A = 30$ мкм, $p_l = 62$ мкм, $d_l = 2$ мкм, $R = 3.75$ мкм, $n_l = 400$, энергии фотонов 50 кэВ и расстоянии $z_0 = 13$ м.

На рис. 2 показана кривая качания для рассматриваемого случая, вычисленная по формулам новой теории. Интегральная интенсивность измеряется в микрометрах, так как она является произведением средней относительной интенсивности на ширину пучка в микрометрах. Фактически, это эффективная апертура, определенная в [17]. Новая кривая качания не имеет форму функции Гаусса, особенно в нижней части. Ее полуширина равна 1.42 мрад, а полная ширина — 2.2 мрад. То есть онлайн-программа в данном случае существенно завышает оценку ширины кривой качания. Наличие резких краев апертуры и использование приближения геометрической оптики для СПЛ приводят к резкому уменьшению эффективной апертуры до нуля при углах больше 1.1 мрад. Максимальный угол оказался слегка меньше, чем это следует из формальной траектории лучей.

Расчет был проведен для точечного источника. Реальный источник имеет поперечные размеры, поэтому кривую надо усреднить по угловому размеру источника. При размере источника 100 мкм и расстоянии 13 м этот размер равен 0.008 мрад. Это намного меньше, чем полуширина кривой качания. Очевидно, что ширина кривой качания зависит от расстояния между источником и СПЛ. Такую кривую при малых расстояниях тоже можно вычислить, но это выходит за рамки данного исследования.

На рис. 2 можно заметить небольшой сбой монотонности на кривой. Этот сбой связан с аномальным поведением траекторий в том случае, когда одна из них касается края выходной апертуры. При смещении точки источника на 8 мм (угол 0.615 мрад) левая траектория выходит на край апертуры, а правая находится еще примерно на 5 мкм от центра и тоже слева. При этом максимум кривой равен 1.394, полуширина (почти равна ширине) — 9.465 мкм, интеграл — 11.583 мкм. При смещении на 7.8 мм аналогичные числа — 1.409,

9.413, 11.206. Хотя максимум больше, полуширина меньше, т.е. левая траектория не так сильно загибается. А при смещении на 8.2 мм получились такие параметры: 1.378, 9.365, 11.235. В этом случае левый край не сдвигается, а правый сдвигается влево, уменьшая ширину пучка, и такая динамика происходит при дальнейшем сдвиге источника. Экспериментальное обнаружение этой особенности может иметь практическое значение.

НОВЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ СИ ПОСЛЕ СПЛ

Стандартным методом расчета свертки двух функций является метод на основе преобразования Фурье с использованием процедуры БПФ. Эта процедура делает расчет весьма быстро, но правильный ответ получается только при соблюдении определенных условий. Для преобразования Фурье используется сетка точек с шагом d и числом точек n . Результат в обратном пространстве получается на сетке с таким же числом точек n и шагом $D = 2\pi/nd$. Так как интеграл Фурье вычисляется в бесконечных пределах, подынтегральная функция должна быть равна нулю вместе со всеми производными на краях области размером nd в прямом пространстве и nD в обратном пространстве.

К каким сложностям это приводит, можно показать на примере функции Гаусса. Известно, что функция Гаусса имеет одну и ту же форму в прямом и обратном пространствах, только полуширины этих функций в прямом w и обратном W пространствах связаны соотношением $wW = 5.55$, в то время как произведение шагов сетки удовлетворяет соотношению $dD = 6.28/n$, т.е. зависит от n . Чтобы одинаково хорошо представить функцию в обоих пространствах, нужно взять $d = w/m$ и $D = W/m$. При этом необходимо, чтобы выполнялось соотношение $n = 1.13 m^2$. Но тогда расчетные области в обоих пространствах получаются в m раз больше полуширин самих функций.

Для расчета свертки с пропагатором Френеля ситуация усложняется, так как размер пучка в фокусе может быть в 1000 раз меньше размера апертуры, и даже в приближении, когда на полуширину пика зарезервировано всего 10 точек, общее число точек сетки должно быть больше 10000 и при этом очень много точек будут просто содержать нули. С другой стороны, на других расстояниях, т.е. не в фокусе, размер пучка относительно большой, но пропагатор Френеля очень сильно осциллирует в обратном пространстве, особенно на больших расстояниях. То есть чтобы иметь шаг в обратном пространстве меньше периода осцилляций, нужно брать большой размер расчетной области в прямом пространстве. Для всех расстояний вычислить результат с помощью одной и

той же сетки точек не всегда удается. Тем не менее при правильном выборе параметров результат можно получить.

В данной работе для вычисления кривой интенсивности пучка СИ после фокусировки СПЛ предлагается использовать метод, который еще нигде не применялся, а именно использовать комплексный интеграл Френеля (КИФ):

$$F(x) = x \int ds \theta(s[1-s]) \exp(i(\pi/2)x^2 s^2). \quad (5)$$

Подставляя (3) в (4), получаем интеграл в виде $\psi_1(x, z) = C(x, z)T(x, z)$, где

$$T(x, z) = \int dx_1 \exp(-i\beta x_1 + i\gamma x_1^2) \theta([x_1 - x_b][x_e - x_1]). \quad (6)$$

Здесь x_b и x_e – нижняя и верхняя границы области шириной A_1 , т.е. границы, в которых пучок выходит из СПЛ; $\beta = 2gx - a_1$, $\gamma = g + a_2$, $g = \pi/\lambda z$,

$$C(x, z) = (gA_0/i\pi A_1)^{1/2} \exp(i[a_0 + gx^2]). \quad (7)$$

Интеграл в (6) можно выразить через КИФ (5) следующим образом:

$$T(x, z) = A \exp(-i\gamma B^2) [F([x_e - B]/A) - F([x_b - B]/A)], \quad (8)$$

где $A = (2\gamma/\pi)^{-1/2}$, $B = \beta/2\gamma$.

Для действительного аргумента КИФ очень быстро вычисляется с помощью простых формул с коэффициентами, подобранными таким образом, что ответ получается весьма близким к реальному ответу. Но в данном случае аргумент x в (5) комплексный. Необходимо использовать формулы, которые допускают аналитическое продолжение в комплексную плоскость. Коэффициенты a_1 и a_2 , если учитывать поглощение СИ в СПЛ, являются комплексными. Специфика задачи в том, что мнимые части этих коэффициентов существенно меньше действительных, т.е. выход в комплексную плоскость происходит на небольшое расстояние. По этой причине при анализе точности расчетов достаточно рассмотреть только действительную часть.

При малых значениях x для расчета функции $F(x)$ можно использовать степенной ряд

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pi i)^k x^{(2k+1)}}{2^k (2k+1)k!}. \quad (9)$$

Вообще говоря, ряд сходится при любых значениях x , но только при малых значениях достаточно нескольких членов ряда. При больших значениях можно использовать асимптотический ряд

$$F(x) = (1+i)/2 + \exp(i\pi x^2/2) (i\pi x)^{-1} [1 + (i\pi x^2)^{-1}]. \quad (10)$$

Для действительного аргумента формулы (9) и (10) дают примерно одинаковые значения при $x = x_0 = 4.7$. То есть при $x_r < x_0$ нужно проводить вы-

числения по формуле (9), а при $x_r > x_0$ – по формуле (10). Здесь x_r – действительная часть x . Преимущество такого метода расчета в том, что сетка точек используется только для вычисления конечного результата. Она может иметь произвольный шаг и произвольное число точек.

Есть только одна проблема. Для СПЛ параметр $a_{2r} < 0$. Фокусное расстояние z_f определяется из условия $\gamma_r = 0$. При $z > z_f$ получаем $\gamma_r < 0$ и параметр A получает большую мнимую часть, что приводит к неверному результату, если считать по формуле (8). Проблема решается следующим образом. В (6) видно, что если поменять одновременно знаки у параметров β_r и γ_r , то получаем комплексно-сопряженное значение интеграла. Именно так и надо делать при $z > z_f$, т.е. поменять знаки, выполнить расчет и затем взять комплексно-сопряженное значение. Данный метод позволяет вычислять волновую функцию СИ на произвольных расстояниях z , включая даже очень большие.

Новый метод расчета волновой функции на произвольном расстоянии после СПЛ реализован в программе XRWP [15] одновременно с новым методом расчета на конце СПЛ, который учитывает апертуру. Он получил номер 6, а метод расчета расстояния через процедуру БПФ одновременно с новым методом расчета на конце СПЛ – номер 5. Для СПЛ с апертурой 30 мкм, представленной в предыдущем разделе, фокусное расстояние, отсчитываемое от конца СПЛ, равно $z_f = 1.5656$ см. Так как на этом расстоянии полуширина пучка СИ равна 24 нм, то в методе 5 шаг сетки d взят равным 1 нм, а число точек $n = 2^{16} = 16 \times 1024$. При этом размер расчетной области был лишь слегка больше размера пучка СИ на выходе из СПЛ и меньше апертуры СПЛ. При меньшем числе точек результат получался неверным. После расчета результат интерполировался на сетку точек с шагом $d_1 = 0.25$ нм и числом точек $n_1 = 301$. В методе 6 расчет проводился сразу на сетке точек с d_1 и n_1 . Вычислялась квадратная матрица $I/I_0(x, z)$ на интервале оси z от 1.5306 до 1.6056 см. Результат расчета методом 6 показан на рис. 3.

Расчет методом 5 давал точно такую же картинку. При этом значение в максимуме относительной интенсивности было равно 728 вместо более точного значения 729. То есть почти никакой разницы между методом БПФ и новым методом на основе КИФ нет. Что касается времени расчета матрицы, то на использованном компьютере понадобилось 5 с для метода 6 и всего 3.5 с для метода 5. Но если взять число точек на оси x не 301, а 151, то время расчета методом 5 никак не изменится, а для метода 6 время уменьшится вдвое практически с тем же результатом. Кроме того, есть возможность оптимизировать скорость расчета КИФ в будущем, а также формулу (8).

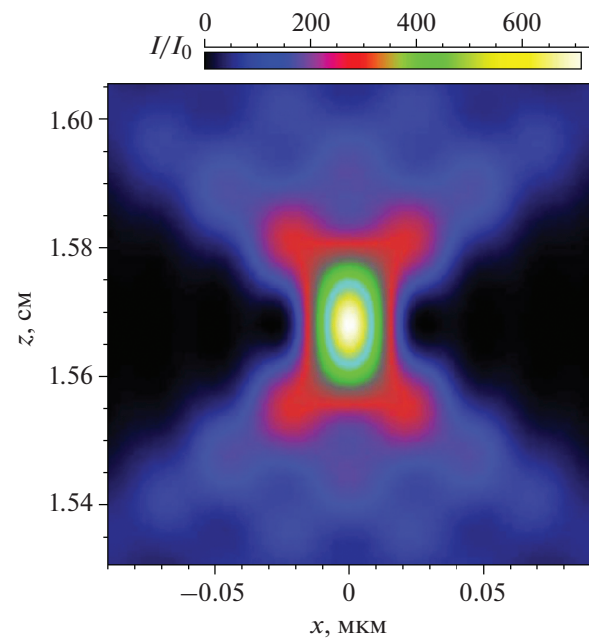


Рис. 3. Распределение относительной интенсивности излучения в области фокуса для параметров СПЛ, указанных в подписи к рис. 2, рассчитанное методом 6 программы XRWP [15].

Новый метод хорош еще и тем, что он психологически более комфортен, так как вычисляется только то, что нужно и ничего лишнего.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Впервые вычислена кривая качания длинной СПЛ в рамках нового варианта теории нанофокусировки пучков СИ с помощью длинной СПЛ, т.е. с учетом апертуры на основе геометрической оптики, согласованной с пропагатором длинной СПЛ, полученным в [2, 3] более 20 лет назад. Разработана компьютерная программа для таких расчетов в рамках общей программы XRWP [15] для решения широкого круга задач оптики СИ. Предложен и реализован новый метод расчета волновой функции СИ после длинной СПЛ на основе вычисления комплексного интеграла Френеля от комплексного аргумента. Новый метод в ряде случаев является самым быстрым по сравнению с другими методами, включая метод на основе БПФ.

Полученные теоретические результаты позволяют успешно прогнозировать и анализировать данные экспериментов на новых источниках СИ четвертого поколения, которые будут созданы в России в ближайшее время. Более подробный анализ фокусировки с помощью длинных каскадных СПЛ, в которых апертура является переменной величиной, будет сделан в будущем.

Работа выполнена в рамках государственного задания НИЦ “Курчатовский институт”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кон В.Г.* // Российские нанотехнологии. 2025. Т. 20. № 2. С. 282.
<https://doi.org/10.56304/S1992722324602921>
2. *Кон В.Г.* // Письма в ЖЭТФ. 2002. Т. 76. № 10. С. 701.
3. *Кон В.Г.* // ЖЭТФ. 2003. Т. 124. № 1. С. 234.
4. *Kohn V.G., Folomeshkin M.S.* // J. Synchrotron Radiat. 2021. V. 28. P. 419.
<https://doi.org/10.1107/S1600577520016495>
5. *Кон В.Г., Фоломешкин М.С.* // Российские нанотехнологии. 2022. Т. 17. № 1. С. 125.
<https://doi.org/10.56304/S1992722322010083>
6. *Bergemann C., Keymeulen H., van der Veen J.F.* // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 91. № 20. P. 204801.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.204801>
7. *Kohn V.G.* // J. Synchrotron Radiat. 2022. V. 29. P. 615.
<https://doi.org/10.1107/S1600577522001345>
8. *Ковальчук М.В., Благов А.Е., Нарайкин О.С. и др.* // Кристаллография. 2022. Т. 67. № 5. С. 726.
<https://doi.org/10.31857/S0023476122050071>
9. *Tokarski S., Wojda P.* // TASK Quarterly. 2024. V. 28. № 1. P. 1.
<https://doi.org/10.34808/3bgj-2293>
10. *Cooley W., Tukey J. W.* // Math. Comp. 1965. V. 19. P. 297.
11. *Snigireva I.I., Kohn V.G., Snigirev A.A.* // Proc. SPIE. 2004. V. 5539. P. 218.
<https://doi.org/10.1117/12.564269>
12. *Kohn V.G.* // J. Synchrotron Radiat. 2018. V. 25. P. 1634.
<https://doi.org/10.1107/S1600577518012675>
13. *Кон В.Г.* Компьютерная онлайн-программа для СПЛ. 2025. <https://kohnvict.ucoz.ru/jsp/1-crlpar.htm>
14. *Фоломешкин М.С., Кон В.Г., Серегин А.Ю. и др.* // Кристаллография. 2025. Т. 70. № 6. С. 899.
<https://doi.org/10.7868/S3034551025060012>
15. *Кон В.Г.* Компьютерная программа XRWP. 2025. <https://xray-optics.ucoz.ru/XR/xrwp.htm>
16. *Snigirev A., Snigireva I., Lyubomirskiy M. et al.* // Opt. Express. 2014. V. 22. № 21. P. 25842.
<https://doi.org/10.1364/OE.22.025842>
17. *Kohn V.G.* // J. Synchrotron Radiat. 2017. V. 24. № 3. P. 609.
<https://doi.org/10.1107/S1600577517005318>