

О ТОМОГРАФИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ

В. Г. Кон, 13-07-2022, <http://kohnvict.narod.ru>

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой статье я решил написать некоторые сведения о томографии для тех, кто ничего о ней не знает, кроме газетных статей о том, как она используется в медицине. Я начну с самых простых понятий и утверждений, которые иллюстрируются картинками. Первый тезис состоит в том, что томография – это просто раздел математики. И чтобы иметь с ней дело совсем не нужны никакие приборы, в том числе и рентгеновские.

Пусть у вас имеется двумерный массив чисел. Числа могут быть произвольными. Этот массив можно изобразить на картинке. Для выявления максимального контраста удобно определить минимальное и максимальное значения в массиве, запомнить их, а на картинке показывать числа в интервале от 0 до 1 после линейного преобразования массива. Так удобно делать по той причине, что шкала соответствия значений в массиве цветам на картинке имеет стандартный вид.

Но можно делать и наоборот. Взять картинку и вынуть из нее двумерный массив чисел. Для выполнения разнообразных математических расчетов необходимо иметь компьютерную программу, которая это умеет делать. У меня есть такая программа и я буду ее использовать. На рис. 1 слева показана картинка размером 512×512 пикселей в png формате. Я вынул из этой картинки ее байты, преобразовал их в числовой массив стандартного вида в интервале от 0 до 255. Затем нарисовал новую картинку с помощью моей стандартной программы рисования двумерных массивов в черно-белом варианте. При этом шаг аргумента выбран как 0.1. Новая картинка показана справа.

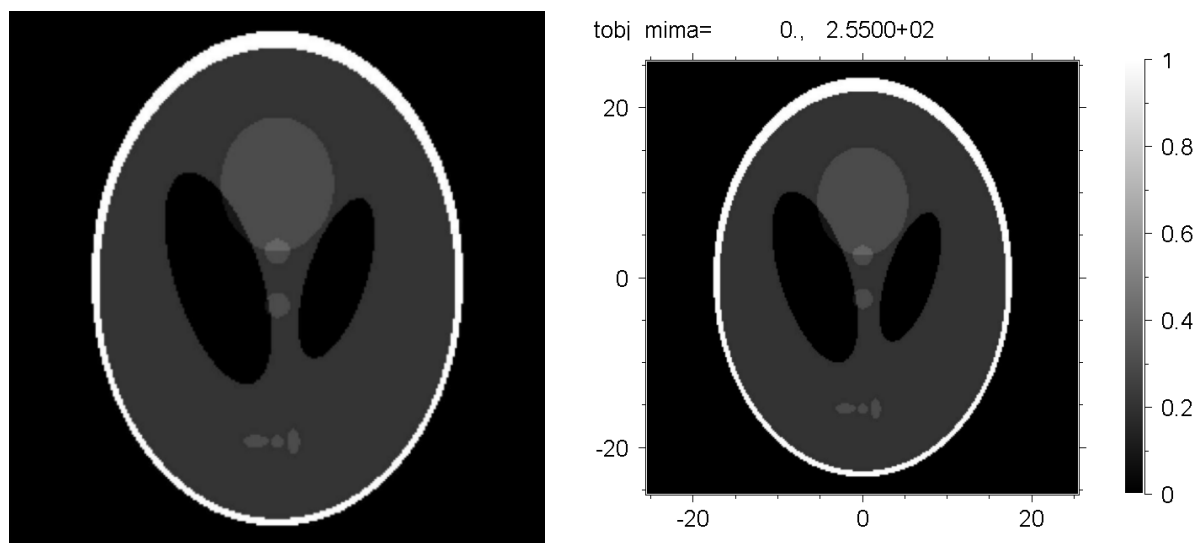


Рис. 1. Картинка (слева) и изображение числового массива (справа)

Еще раз отмечу, что картинка – это только один из многих источников создания двумерного массива чисел. Нас интересует именно двумерный массив чисел. Его можно создавать разными способами, в том числе вычислять по формулам или измерять приборами. Неважно как создан массив чисел. Мы будем работать именно с ним.

Следующий шаг. Многие графические программы умеют вращать картинки на произвольный угол. Я лично часто пользуюсь программой FastStone Image Viewer. Она бесплатная и в целом очень неплохая. Фотографии она вращает вполне нормально. Но для наших целей вращать картинку с помощью этой программы не удобно. Да и делается это неточно. Мы будем вращать двумерный массив чисел. У нас уже есть такой массив в интервале значений от 0 до 255.

Вращение массива чисел снова выполняет моя программа. Она это делает точнее, чем программа FastStone Image Viewer и это важно для томографии. На рис. 2 показаны две картинки, которые получены после вращения массива на 45 и –45 градусов. Вращение идет по часовой стрелке.

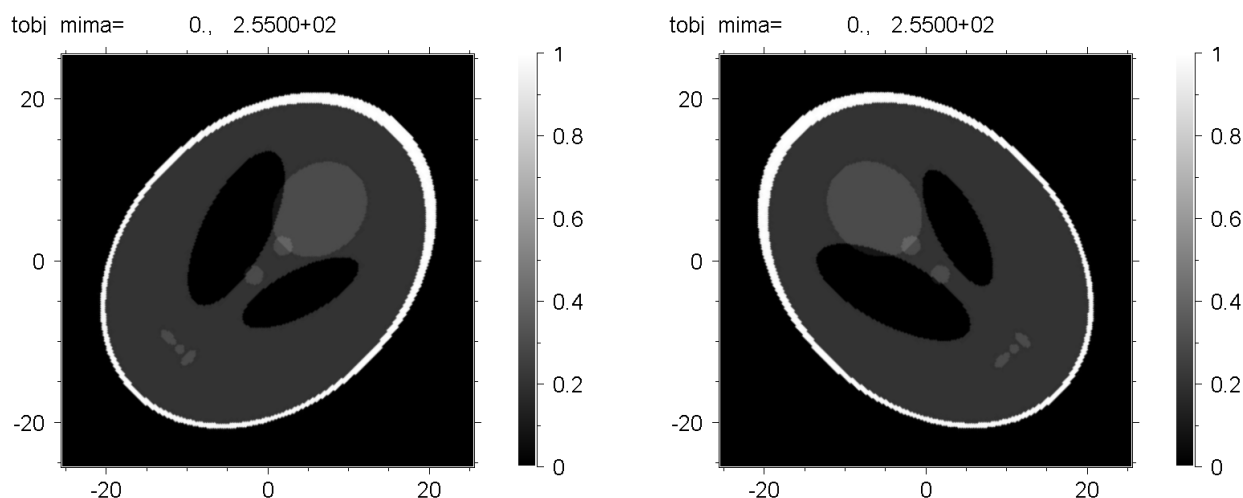


Рис. 2. Вращение массива на 45 (слева) и –45 (справа) градусов.

При практическом использовании томографии двумерного массива чисел нет, его как раз хотелось бы получить. Есть просто объект, который просвечивается насквозь. И вращается как раз объект. Именно объект дает информацию для томографии. Но математически мы можем заменить объект числовым массивом и его тоже можно вращать, что и показано на рис. 2.

2. О ТОМОГРАФИИ. СНАЧАЛА СИНОГРАММА.

Томография – это метод преобразования одного набора данных в другой набор данных. На входе для этого метода дается синограмма. А на выходе получается томограмма. Синограмма содержит информацию о проекциях объекта при его вращении с постоянным шагом в интервале от 0 до 180 градусов. Проекция представляет собой одномерный массив, каждая точка в котором равна сумме значений двумерного массива по другому направлению.

Математически наш объект представляет собой двумерный массив чисел. На экране компьютера картинка имеет горизонталь и вертикаль. Проекция может быть горизонтальной, в каждой точке которой записаны суммы всех точек массива по вертикали. Или наоборот, это не имеет значения.

Синограмма – это снова двумерный массив, но его размерность иная. По горизонтали она совпадает с исходным массивом. То есть если исходный массив имел размер 512×512, то будет 512. А по вертикали размер равен числу проекций. Например, если вращение идет с шагом 2 градуса, то будет всего 90 проекций. А массив будет иметь размер 512×90.

В этом месте надо установить связь между математикой и реальной жизнью, хотя бы медициной. Как в математике я уже сказал. Синограмма содержит сумму всех точек массива по одному направлению. И это важно. В медицине просвечивают объект плоской волной рентгеновского излучения и измеряют ослабление интенсивности лучей в каждой точке плоского фронта.

Считается, что ослабление происходит по экспоненциальному закону, а аргументом экспоненты является интеграл от функции $f(x,y)$ по второму аргументу, то есть вдоль направления лучей со знаком минус. Функция $f(x,y)$ представляет собой произведение коэффициента поглощения на плотность материала.

Именно функция $f(x,y)$ и интересует медиков. Но вместо нее мы получаем интеграл по второму аргументу. Этот интеграл получается после логарифмирования данных интенсивности и смены знака на противоположный. То есть аналогия с математикой есть. Там мы суммируем точки. Тут мы получаем сумму в результате измерения. Если в процессе измерения мы не получаем сумму после логарифмирования, то применять томографию нельзя. Получится ситуация слона в посудной лавке. Короче, идиотизм.

Но вернемся к математике. У нас есть двумерный числовой массив, мы умеем его вращать и, само собой разумеется, умеем суммировать точки. Моя программа умеет это делать, и я специально буду суммировать точки не по вертикали (то есть по второму аргументу), а по горизонтали (то есть по первому аргументу). Как я уже сказал, это дает тот же самый ответ при другом выборе интервала углов вращения.

3. О ТОМОГРАФИИ. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ.

О том как программа превращает синограмму, то есть набор данных, который можно измерить, в томограмму я здесь рассказывать не буду. Это написано в других моих статьях, их можно найти на моем сайте. В конце статьи я приведу ссылки. Сам же я просто переписал то, что написано в книгах. Будем считать, что читатель –пассажир самолета. Как устроен самолет ему знать не обязательно. Важно знать как он летает и какие фокусы при этом могут происходить.

Итак, мы имеем двумерный массив, мы умеем его вращать и суммировать. Значит нам не трудно получить синограмму, то есть симулировать эксперимент. А потом мы вычисляем томограмму и сравниваем с оригиналом. Прелесть теории (и математики) в том, что можно проверить результат расчета. Мы как бы знаем точный ответ и можем анализировать свойства математики.

На рисунке 3 показаны синограмма и томограмма при числе проекций 90. Если суммировать по горизонтали, то интервал углов надо брать от -90 до 90 , потому что программа томографии сделана так, что она показывает объект в первой проекции, предполагая, что суммирование идет по вертикали.

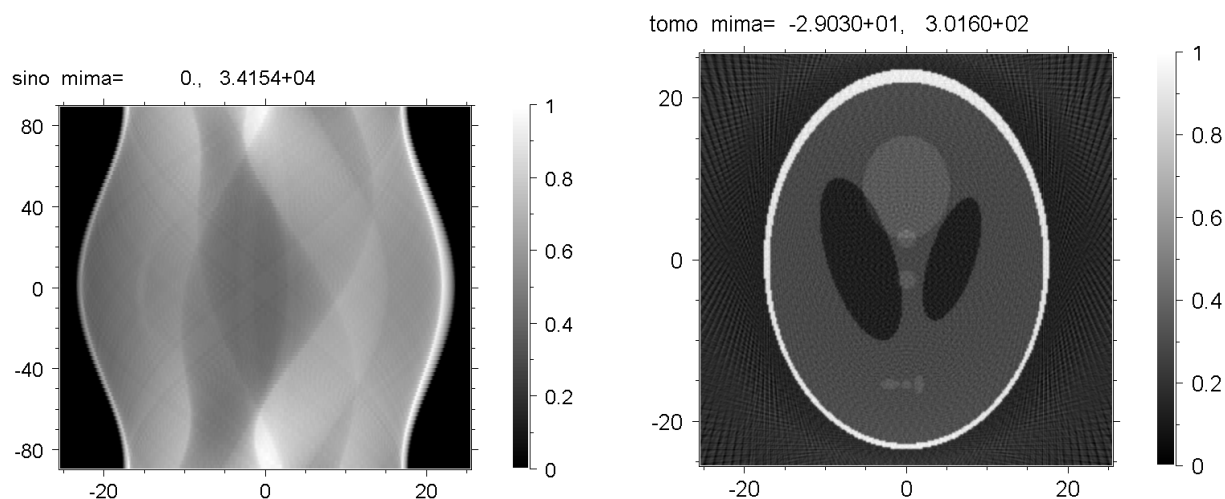


Рис. 3. Синограмма (слева) и томограмма (справа)

Обсудим, что получилось. В целом мы видим, что томограмма объект, то есть исходную картинку, показывает. Но есть неточности за пределами круга, вписанного в квадрат. Это будет лучше видно, если увеличить размер картинки масштабированием. Фон имеет неоднородную структуру, но правильное среднее значение. То есть все объекты, как белые, так и черные, а также серые, имеют правильную окраску и правильные размеры.

При этом надо отметить что входной набор точек был намного меньше, чем выходной, так как по второму аргументу было всего 90 точек вместо 512. В этом и есть главная причина

неоднородной структуры однородных областей. Если использовать 180 проекций, то результат получается значительно лучше. Он показан на рисунке 4. Изменение вертикального размера синограммы связано с тем, что каждый пиксель по вертикали рисуется несколькими пикселями экрана, число которых равно $\text{int}(512/n_a)$, где n_a – число проекций. Если $n_a = 90$, то $n_a \text{int}(512/n_a) = 450$, а если $n_a = 180$, то 360.

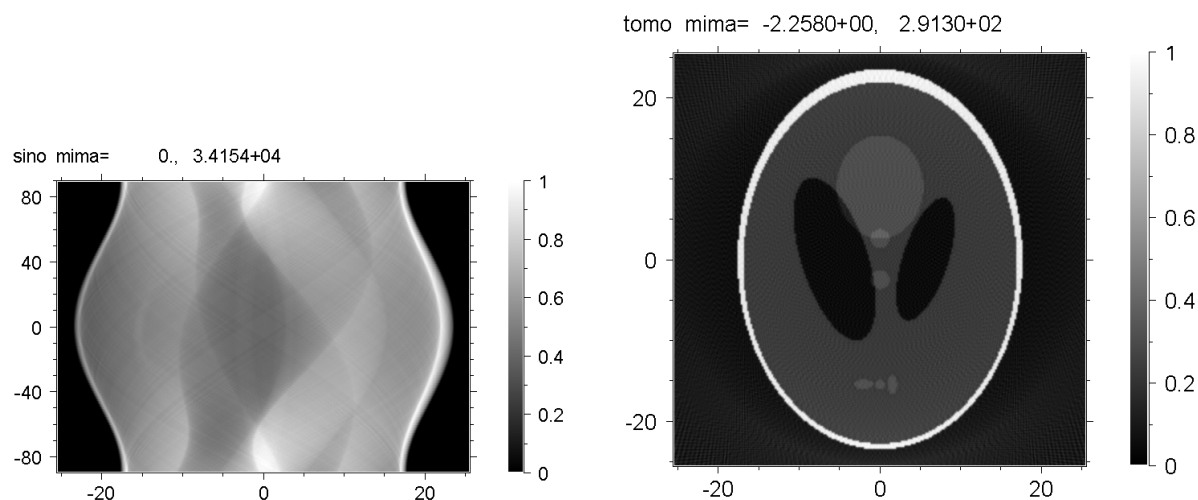


Рис. 4. Синограмма (слева) и томограмма (справа)

О точности реконструкции объекта методом томографии можно судить также по значениям минимального и максимального элементов массива. Исходно были значения 0 и 255. На рис. 3 показаны значения примерно -29 и 302 , а на рис. 4 имеем -23 и 291 . Очевидно, что чем больше проекций будет записано, тем точнее будет результат. Но интересно, что грубое представление об объекте можно получить и при достаточно малом числе проекций.

Еще раз отмечу, что очень важно, чтобы проекции содержали интеграл от плотности объекта, а математически – сумму по точкам двумерного массива. Если в проекциях будет что-то другое, то результат, конечно, получится, но он будет фантомом, фейком. Он не будет показывать реальный объект.

4. О ПРАВИЛАХ ИГРЫ В ТОМОГРАФИИ

А теперь обсудим необходимые правила игры в том методе томографии, который чаще всего используют. Этот метод называют FBP (filtered back projection). Что это значит знать не обязательно, но важно знать, что в этом методе используется преобразование Фурье, причем конкретно используется очень эффективная процедура FFT (fast Fourier transformation).

Эта процедура всегда работает на конечной системе точек. И наиболее быстро она работает, когда число точек равно целой степени 2. Как раз поэтому и выбрано число точек $512 = 2^9$. Но важно не это, а то, что используется преобразование Фурье. А это преобразование всегда делается в бесконечных пределах. Если область интегрирования конечна, то автоматически предполагается, что за пределами этой области функция равна 0.

И надо следить за тем, чтобы синограмма всегда имела минимальное значение, равное 0. В нашем примере так оно и было. Это была сумма по всем точкам, плотность в которых равна 0. А что будет, если минимальное значение на синограмме будет больше 0, например, 1024? Мы можем это значение разделить между всеми точками проекции, и получится, что в каждой точке объекта есть константа, равная 2. В том числе и на границе области.

Соответственно на границе получается скачок с 2 до 0, потому за пределами области функция равна нулю. А процедура FFT не любит скачков. Скачки приводят к резким пикам и вообще неоднородному фону вблизи них. Это артефакты, связанные с фокусами математики, о которых не место тут говорить. На рис. 5 показан результат работы программы в этом случае. Синограмма точно такая же, только к ней прибавлена константа 1024. И томограмма

нормально показывает объект. Но изменился фон. То есть появился тонкий контур круга. Внутри него цвет фона более темный, а снаружи более светлый.

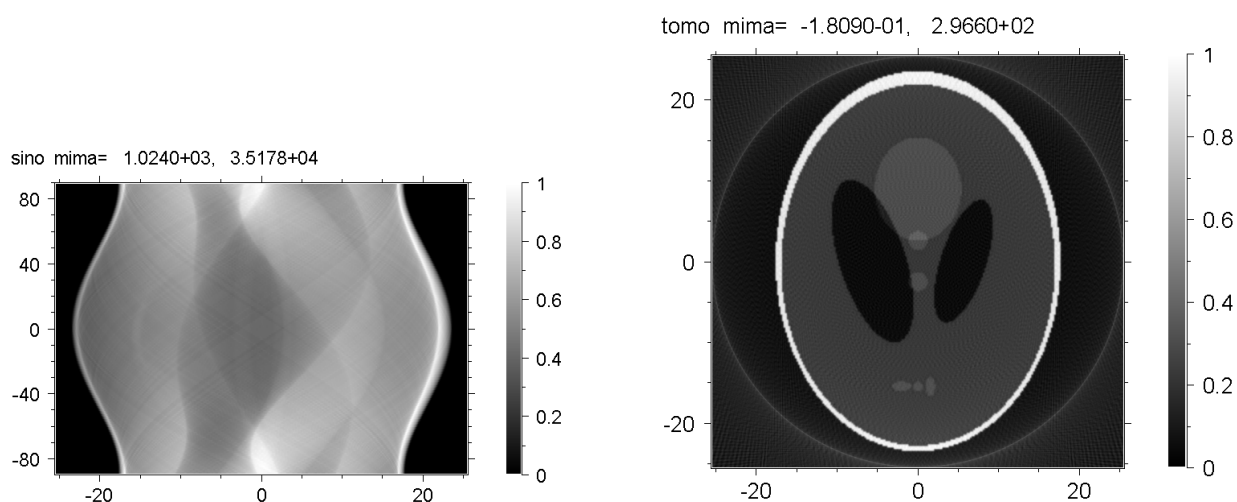


Рис. 5. Синограмма (слева) и томограмма (справа)

Но в примере минимум на синограмме в 35 раз меньше максимума. А если прибавить побольше. Результат показан на рис. 6, где минимум в 8 раз больше, но все еще меньше максимума. Тут круг весьма резко очерчен, а вблизи него есть светлая полоса по обе стороны. Можно изучать свойства этого эффекта. Если минимум поднять повыше, даже выше максимума, то можно вообще не увидеть объект, хотя он там будет, но черный.

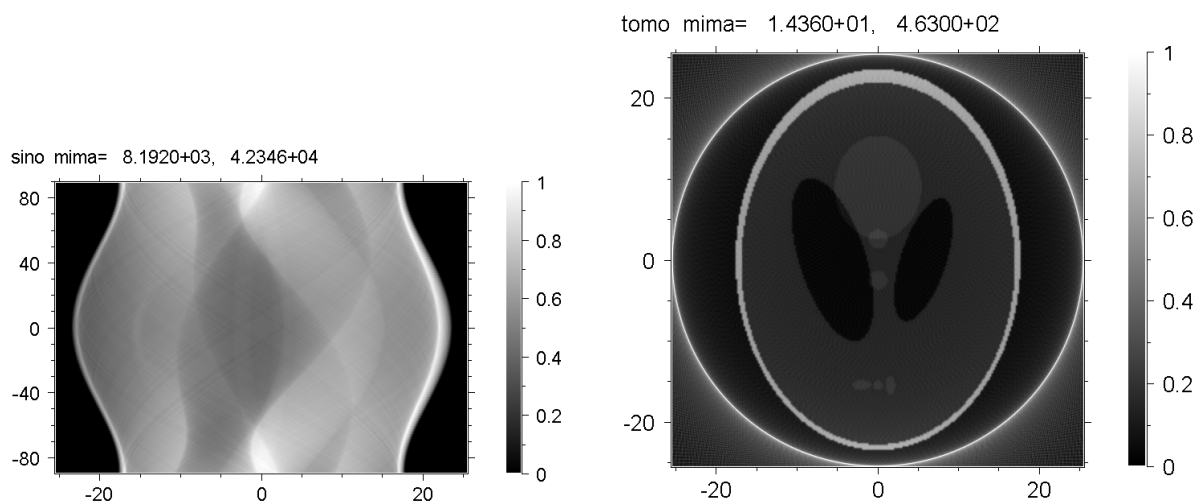


Рис. 6. Синограмма (слева) и томограмма (справа)

Интересно, что иногда возникают ситуации, когда объектом является само рентгеновское излучение, а оно никогда не может быть равно нулю. Или рассматривается часть большого объекта, которая тоже нигде нулю не равна. Как быть в таких случаях? Ответ однако есть. Дело в том, что математическая процедура томографии линейная. Это значит, что если из синограммы вычесть константу, то ее потом можно прибавить к томограмме.

Результат от этого не испортится. Например, если из каждой проекции синограммы вычесть n (число точек), то потом в каждой точке томограммы можно прибавить 1 и получится правильный ответ. Как раз симуляция эксперимента позволяет легко в этом убедиться. И вот это всегда надо делать, чтобы избежать яркого кольца на томограмме.

Такие вот правила игры. Сейчас появилась тенденция совать в программу томографии результаты любых измерений, даже если они и не удовлетворяют нужным условиям. Я

рассмотрел пример, когда все удовлетворяет, только минимум не нулевой. И то возникают проблемы. А на самом деле таких проблем намного больше.

Я приведу только один пример. Если в данных по поглощению нечаянно обнулилось одно число перед логарифмированием, то оно будет исправлено на 1. И даст очень высокий пик в одной точке одной проекции. А на томограмме это приведет к яркой линии через всю томограмму. Если проекции кроме поглощения содержат фазовый контраст, то такие линии всегда появляются. Фазовый контраст дает относительно правильные контуры объектов только если они круглые.

Сейчас стало модно крутить все на свете и применять томографию к любым данным, которые никакого отношения к синограмме не имеют. Часто этим занимаются те, кто вообще ничего не понимает в томографии. Но в любой игре есть правила. Их надо знать и соблюдать. А тех, кто этого не делает было бы неплохо наказывать.

5. ЛИТЕРАТУРА

Прежде всего я укажу статьи на своем сайте. Последняя статья была написана давно, но недавно отредактирована. Вот ее адрес

<http://kohnvict.ucoz.ru/a/10/tomo02.htm>

Эта статья уже тоже устарела, но кое-что там правильно. В ближайшее время я ее снова отредактирую. И там есть ссылки на другие мои статьи и на книгу.

Вообще говоря, я писал статьи в связи с тем, что у меня есть собственная программа томографии. Она написана на моем языке программирования ACL и может быть получена бесплатно на моем сайте. Все детали есть на сайте интерпретатора ACL

<http://kohnvict.ucoz.ru/vkacl/vkACLdr.htm>

Но вообще-то код программы томографии весьма простой и легко встраивается в любую программу на языке ACL. То есть программ томографии можно написать много, если выучить язык программирования.